



# Fonctions de corrélation en théorie des champs à température finie : aspects formels et applications au plasma de quarks et de gluons

François Gelis

## ► To cite this version:

François Gelis. Fonctions de corrélation en théorie des champs à température finie : aspects formels et applications au plasma de quarks et de gluons. Physique des Hautes Energies - Expérience [hep-ex]. Université de Savoie, 1998. Français. NNT : . tel-00002457

**HAL Id: tel-00002457**

**<https://theses.hal.science/tel-00002457>**

Submitted on 24 Feb 2003

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**CHAMBÉRY**  
**N° d'ordre :**

**décembre 1998**

**UNIVERSITÉ de SAVOIE**  
**U.F.R. S.F.A.**

**THÈSE**  
présentée pour obtenir  
**Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES**  
**DE L'UNIVERSITÉ DE SAVOIE**  
Spécialité : Physique Théorique

par  
**François GELIS**

**SUJET :**  
**Fonctions de corrélation en théorie des champs à température finie :**  
**aspects formels et applications au plasma de quarks et de gluons**

Soutenue le 10 décembre 1998 devant la Commission d'examen

Monsieur Jean-Claude LE GUILLOU  
Monsieur Patrick AURENCHE  
Monsieur Michel LE BELLAC  
Madame Dominique SCHIFF  
Monsieur Jean-Paul BLAIZOT  
Monsieur Ulrich HEINZ

**président du jury**  
**directeur de thèse**  
**rapporteur**

Monsieur Rudolf BAIER

**rapporteur**



Fonctions de corrélation  
en théorie des champs  
à température finie:  
aspects formels  
et applications au plasma  
de quarks et de gluons

François Gelis

Décembre 1998



# Remerciements

**I**l convient avant d'aller plus loin de m'acquitter de la tâche périlleuse qui consiste à témoigner ma reconnaissance à tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à l'achèvement de cette thèse. La première personne qui me vient à l'esprit pour cette liste de ceux et celles à qui je suis redevable malheureusement n'est plus. Il s'agit de Tanguy Altherr qui lors d'un déjà lointain stage de DEA a su me faire partager l'enthousiasme qu'il avait pour cette discipline et m'a convaincu sans peine d'en faire mon sujet de thèse, et cet hommage posthume est bien peu comparé à la dette que j'ai contractée auprès de lui.

Dans cette liste, une place privilégiée revient fort naturellement à mon professeur, directeur de thèse, coauteur, collègue de bureau et également excellent ami Patrick Aurenche. Je lui dois beaucoup pour les nombreux conseils qu'il m'a prodigués tout au long de cette thèse, mais aussi pour l'indépendance qu'il m'a accordée ; en bref, pour son talent dans cet art subtil qui consiste à laisser une grande liberté à un étudiant tout en lui procurant la sensation rassurante d'être suivi de près (à moins que ce ne soit l'inverse). Bien sûr, ce manuscrit lui doit beaucoup également, puisqu'il n'aurait pas pu voir le jour sans ses patientes relectures et ses nombreuses suggestions.

Cette thèse doit aussi beaucoup à mes collègues et plus généralement à toutes les personnes avec qui j'ai discuté des problèmes évoqués dans ce manuscrit ; soit dans un ordre vaguement alphabétique : Rolf Baier, Fritjof Flechsig, Françoise Guerin, Sourendu Gupta, Randy Kobes, Hubert Mabilat, Herbert Nachbagauer, Jean Orloff, Emmanuel Petitgirard, Rob Pisarski, Anton Rebhan, Michel Tytgat, Haitham Zaraket ; ainsi que tous ceux que j'oublie et que je prie par avance de bien vouloir m'excuser. Il me faut ajouter à cette liste Stéphane Peigné et Richard Taillet, qui ont relu des passages de ce manuscrit afin de m'aider à pourchasser les innombrables fautes de frappe (euphémisme pour "faute d'orthographe") que j'avais habilement disséminées dans le texte afin de mettre à l'épreuve leur sagacité.

Il me faut remercier également Michel Le Bellac et Rolf Baier qui ont accepté la tâche ingrate d'être les rapporteurs de cette thèse, ainsi que Dominique Schiff, Jean-Paul Blaizot et Ulrich Heinz, qui m'ont fait l'honneur d'être dans mon jury. Finalement, une mention toute particulière revient à Jean-Claude Le Guillou, qui a bien voulu présider ce jury, et sans les pressions amicales duquel une section de ce manuscrit n'aurait jamais vu le jour.

Je remercie aussi Paul Sorba pour m'avoir reçu dans son laboratoire pour y effectuer successivement mon stage de DEA, mon service national et enfin ma thèse, ainsi que Dominique Turc-Poencier pour n'avoir pas peu contribué à son bon déroulement. J'y associe tous mes autres collègues du LAPTH pour la chaleureuse ambiance qui y règne, et en particulier pour m'avoir entraîné sur les versants scabreux de la physique théorique aussi bien que de leur sens de l'humour.

# Prologue

Cette thèse se compose de deux parties principales qui forment des entités assez largement indépendantes l’une de l’autre. Néanmoins, la première partie traitant de questions relatives au formalisme pose les notations qui seront utilisées systématiquement dans tout ce qui suit. Par ailleurs, au sein d’une partie donnée, l’ordre des chapitres n’est pas quelconque, et il y a quelque avantage à les lire dans l’ordre.

Les outils mathématiques plus spécifiques dont on peut avoir besoin ici et là dans cette thèse ont été regroupés dans une troisième partie intitulée “Compléments techniques”. Le lecteur averti pourra naturellement et sans dommages faire l’impasse sur cette partie.

Finalement, un index aidera les aventuriers qui ont entrepris de lire cette thèse dans l’ordre alphabétique.

Concernant la nomenclature, j’ai essayé autant que faire se peut d’utiliser les ressources de la langue française et de ne recourir à la langue anglaise que lorsque c’était difficilement évitable, ou pour des sigles qui sont très usités et deviennent totalement hermétiques si on les traduit en français.

Pour ce qui est des conventions implicites, la métrique utilisée suit le consensus usuel en physique des particules, à savoir  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . Par ailleurs, j’utilise un système d’unités dans lequel  $\hbar = k_B = c = 1$ . Par conséquent, masse, énergie, fréquence et température ont la même dimension.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Quelques aspects formels</b>	<b>12</b>
<b>1</b>	<b>Éléments de théorie des champs à température finie</b>	<b>16</b>
1.1	Approche covariante et thermodynamique relativiste . . . . .	17
1.1.1	Introduction au problème . . . . .	17
1.1.2	Thermodynamique dans le référentiel de repos . . . . .	18
1.1.3	Une thermodynamique covariante est-elle indispensable? . . . . .	20
1.1.4	Mécanique statistique covariante . . . . .	23
1.1.5	Formulation covariante de la thermodynamique . . . . .	24
1.2	Principes de base . . . . .	28
1.2.1	Prélude . . . . .	28
1.2.2	Fonctions de Green . . . . .	28
1.2.3	Extraction de la dépendance en $\lambda$ . . . . .	29
1.2.4	Fonctionnelle génératrice . . . . .	32
1.3	Théorème de Wick et règles de Feynman . . . . .	34
1.3.1	Théorème de Wick . . . . .	34
1.3.2	Règles de Feynman . . . . .	36
1.4	Symétrie KMS . . . . .	40
1.5	Invariance vis-à-vis du contour . . . . .	41
1.6	Formalisme à temps imaginaire . . . . .	43
<b>2</b>	<b>Représentation spectrale des fonctions de Green</b>	<b>47</b>
2.1	Représentations spectrales . . . . .	48
2.1.1	Expression en coordonnée $x^o$ . . . . .	48
2.1.2	Fonctions retardées généralisées . . . . .	50
2.2	Décomposition sur une base de distributions . . . . .	51
2.3	Egalité des fonctions retardées scalaires à énergie nulle . . . . .	55
2.4	Cas particulier des fonctions à deux points . . . . .	56
2.5	Propriétés de la convolution . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Formalismes à temps réel</b>	<b>61</b>
3.1	Preliminaires . . . . .	62
3.2	Du rôle de la partie verticale . . . . .	65
3.2.1	Position du problème . . . . .	65
3.2.2	Un exemple simple . . . . .	66

3.2.3	Localisation de la contribution de la branche verticale . . .	68
3.2.4	Traitement des insertions de self-énergie . . . . .	70
3.3	Compensation des pathologies . . . . .	73
3.3.1	Identités KMS dans le formalisme à temps réel . . . . .	73
3.3.2	Compensation des pathologies . . . . .	74
3.3.3	Origine de la différence entre les deux choix . . . . .	74
3.4	Diagrammes du vide . . . . .	75
3.5	Limite $T = 0$ du formalisme à temps réel . . . . .	76
3.6	Divergences ultraviolettes et renormalisation . . . . .	78
3.7	Formalismes alternatifs . . . . .	79
3.8	Digressions sur les phénomènes hors d'équilibre . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Règles de coupure dans les formalismes à temps réel</b>	<b>87</b>
4.1	Equation du plus grand temps . . . . .	88
4.2	L'approche de Kobes et Semenoff . . . . .	91
4.3	L'approche de Bedaque, Das et Naik . . . . .	93
4.4	Comparaison . . . . .	95
4.5	Règles de coupure des autres formalismes . . . . .	99
4.6	Le cas particulier du formalisme $R/A$ . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Désintégration du <math>\pi^0</math> et limites d'impulsion nulle</b>	<b>103</b>
5.1	Modèle $\sigma$ linéaire . . . . .	104
5.2	Amplitude de désintégration $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ . . . . .	107
5.2.1	Taux de désintégration . . . . .	107
5.2.2	Calcul de Pisarski . . . . .	108
5.2.3	Expression dans le formalisme retardé-avancé . . . . .	109
5.3	Ambiguïté de la limite d'impulsion nulle . . . . .	110
5.3.1	Existence de cette limite . . . . .	110
5.3.2	Calcul des termes en $\lambda^0$ . . . . .	112
5.3.3	Photons réels . . . . .	115
5.3.4	Photons de genre espace . . . . .	117
5.3.5	Résultat générique . . . . .	119
5.4	Boucles dures et désintégration du pion . . . . .	120
5.4.1	Introduction . . . . .	120
5.4.2	Boucles dures dans le modèle $\sigma$ linéaire . . . . .	121
5.4.3	Effet des boucles dures sur $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ . . . . .	122
5.5	Anomalies et désintégration du pion . . . . .	124
<b>II</b>	<b>Production de photons</b>	<b>128</b>
<b>6</b>	<b>Observables</b>	<b>132</b>
6.1	Observables dans un plasma . . . . .	132
6.1.1	Remarques générales . . . . .	132
6.1.2	Propriétés thermodynamiques . . . . .	133
6.1.3	Diffusion d'une particule externe . . . . .	134

6.1.4	Production de particules . . . . .	135
6.2	Calcul d'un taux de production . . . . .	135
6.2.1	Approche élémentaire . . . . .	135
6.2.2	Formule de Weldon . . . . .	137
6.2.3	Production de paires de leptons . . . . .	140
<b>7</b>	<b>Boucles dures : des concepts aux limitations</b>	<b>141</b>
7.1	Nécessité des boucles dures . . . . .	142
7.2	Introduction aux boucles dures : $\lambda\phi^4$ . . . . .	144
7.2.1	Modèle . . . . .	144
7.2.2	Boucle thermique dure . . . . .	144
7.2.3	Sommation . . . . .	145
7.2.4	Théorie effective . . . . .	145
7.3	Théories de jauge . . . . .	147
7.3.1	Remarques préliminaires . . . . .	147
7.3.2	Extraction des boucles dures . . . . .	147
7.3.3	Liste des boucles dures . . . . .	149
7.3.4	Interprétation physique . . . . .	149
7.3.5	Propriétés générales . . . . .	153
7.3.6	Construction d'un Lagrangien effectif . . . . .	154
7.4	Contre-terms ou coupures . . . . .	155
7.5	Digression sur la renormalisabilité de la théorie effective . . . . .	158
7.6	Problèmes résiduels . . . . .	160
7.6.1	Gluons transverses . . . . .	160
7.6.2	Divergences colinéaires . . . . .	162
7.7	Limite d'impulsion dure et ordres supérieurs . . . . .	163
7.7.1	Introduction . . . . .	163
7.7.2	Processus issus de la région $L^2 < 0$ . . . . .	164
7.7.3	Conséquences de l'approximation de boucle dure . . . . .	165
7.7.4	Calcul correct de ces processus . . . . .	166
7.7.5	Nouveaux processus . . . . .	166
<b>8</b>	<b>Production de photons statiques</b>	<b>168</b>
8.1	Quelques aspects du calcul à une boucle . . . . .	169
8.1.1	Diagramme . . . . .	169
8.1.2	Processus physiques . . . . .	170
8.1.3	Résultats . . . . .	171
8.2	Généralités sur les diagrammes à deux boucles . . . . .	172
8.2.1	Topologies . . . . .	172
8.2.2	Éléments de matrice . . . . .	174
8.2.3	Espace des phases . . . . .	177
8.3	Processus impliquant un gluon de genre temps . . . . .	178
8.3.1	Processus . . . . .	178
8.3.2	Contribution des contre-terms . . . . .	179
8.3.3	Contributions à deux boucles . . . . .	183
8.3.4	Comparaison avec BPY . . . . .	186

8.3.5	Comparaison avec la théorie nue . . . . .	187
8.4	Processus impliquant un gluon de genre espace . . . . .	187
8.4.1	Processus . . . . .	187
8.4.2	Quelques remarques sur la taille de l'espace des phases . .	188
8.4.3	Contribution du bremsstrahlung . . . . .	189
8.5	Conclusions et extensions . . . . .	192
<b>9</b>	<b>Production de photons quasi-réels</b>	<b>195</b>
9.1	Photons mous réels à une boucle . . . . .	196
9.2	Diagrammes à deux boucles . . . . .	197
9.2.1	Diagrammes . . . . .	197
9.2.2	Éléments de matrice . . . . .	198
9.2.3	Espace des phases . . . . .	198
9.3	Généralités sur l'apparition de divergences colinéaires . . . . .	199
9.3.1	Position des pôles . . . . .	199
9.3.2	Proximité des pôles . . . . .	201
9.3.3	Condition sur $L^2$ . . . . .	202
9.4	Calcul des traces de Dirac . . . . .	204
9.5	Photons réels mous . . . . .	209
9.5.1	Expression du tenseur de polarisation . . . . .	209
9.5.2	Usage de règles de somme . . . . .	211
9.5.3	Ordre de grandeur du résultat . . . . .	213
9.5.4	Propriétés infrarouges . . . . .	214
9.6	Extension aux photons mous légèrement virtuels . . . . .	219
9.6.1	Points communs et différences . . . . .	219
9.6.2	Discussion qualitative de l'effet de $Q^2$ . . . . .	220
9.6.3	Résultats . . . . .	221
9.7	Extension aux photons réels durs . . . . .	223
9.7.1	Modifications . . . . .	223
9.7.2	Contribution du bremsstrahlung . . . . .	224
9.7.3	Contribution de la région II . . . . .	225
9.7.4	Comparaison avec les résultats existants . . . . .	226
9.8	Connexion avec les divergences des boucles dures . . . . .	227
<b>10</b>	<b>Explorations</b>	<b>230</b>
10.1	Diffusions multiples et effet LPM . . . . .	231
10.1.1	Introduction . . . . .	231
10.1.2	Le modèle et ses hypothèses . . . . .	232
10.1.3	Résultats pour QED . . . . .	233
10.1.4	Discussion . . . . .	234
10.2	Résultats partiels à trois boucles . . . . .	235
10.2.1	Diagrammes . . . . .	235
10.2.2	Effets d'une correction à la masse $M_\infty$ . . . . .	235
10.2.3	Compensations dans le secteur infrarouge . . . . .	241
10.2.4	Conclusions préliminaires . . . . .	243
10.3	Inclusion d'une largeur . . . . .	243

10.3.1	Régularisation par une largeur . . . . .	243
10.3.2	Problèmes avec l'invariance de jauge . . . . .	244
10.3.3	Importance des diagrammes en échelle . . . . .	245
10.3.4	Tentative d'application à la production de photons . . . . .	246
<b>III</b>	<b>Compléments techniques</b>	<b>253</b>
<b>A</b>	<b>Distributions</b>	<b>255</b>
A.1	Eléments de théorie des distributions . . . . .	256
A.1.1	Définition . . . . .	256
A.1.2	Opérations de base . . . . .	257
A.1.3	Support d'une distribution . . . . .	257
A.1.4	Exemples . . . . .	258
A.2	Transformation de Fourier . . . . .	258
A.3	Multiplication des distributions . . . . .	260
A.3.1	Position du problème . . . . .	260
A.3.2	Produit direct de deux distributions . . . . .	260
A.3.3	Produit de convolution . . . . .	260
A.3.4	Produits pathologiques . . . . .	261
A.3.5	Non associativité du produit des distributions . . . . .	262
<b>B</b>	<b>Intégrales fréquentes</b>	<b>265</b>
B.1	Intégrales du type $\int dx P(x) Q(n_{B,F}(x))$ . . . . .	265
B.2	Intégrales du type $\int dx \ln(x) P(x) Q(n_{B,F}(x))$ . . . . .	268
B.3	La fonction $\zeta$ de Riemann . . . . .	270
<b>C</b>	<b>Règles de somme</b>	<b>272</b>
C.1	Point de départ . . . . .	272
C.2	Contribution des pôles . . . . .	274
C.3	Intégrales du type $\int P(x) \rho_{T,L}(x)$ . . . . .	274
C.4	Intégrales du type $\int x P(1/(x^2 - y^2)) \rho_{T,L}(x)$ . . . . .	275
	<b>Bibliographie</b>	<b>277</b>

Les cathédrales de la physique  
n'ouvrent leurs nefs démesurées  
qu'aux albatros mathématiques.  
Et toi, modeste petit homme,  
oublié au pied de la colonne,  
les regardant là-haut planer  
dans une éclatante lumière,  
si tu t'avises de leur demander :  
"Pardon, Messieurs les physiciens,  
Qu'est donc cette étrange lumière ?"  
Les physiciens te répondront  
qu'elle est constituée de photons.  
Contente toi de cette réponse !  
Car si d'aventure tu demandais  
ce que sont ces mystérieux photons,  
ces pédants oiseaux feront choir :  
"Le photon est la fonction propre  
de l'hamiltonien quantifié  
du champ électromagnétique."

Première partie

Quelques aspects formels





# Introduction

**L**e but de la théorie des champs à température finie est de décrire les systèmes de particules élémentaires où la densité et la température doivent être prises en considération, tels les plasmas. En effet, la théorie des champs habituelle ne permet d'appréhender que les situations où le nombre de particules dans l'état initial est peu élevé, ce qui est la situation qui prévaut dans les collisionneurs de particules, et des extensions à ce formalisme sont nécessaires pour décrire un système comportant un grand nombre de particules.

Une telle extension de la théorie des champs est apparue dans les années cinquante, avec les travaux de MATSUBARA, dans le contexte de la physique du solide. Ces travaux ont connu peu d'écho en physique des particules jusqu'à ce que des simulations numériques de Chromodynamique Quantique sur réseau aient semblé indiquer que les quarks et les gluons, qui sont les champs fondamentaux de la théorie des interactions fortes, pouvaient à suffisamment haute température (la température de cette transition de phase est estimée à environ  $150 \text{ MeV}/k_B$ ) exister à l'état libre sous la forme d'un plasma, alors qu'à température nulle ils sont confinés à l'intérieur des hadrons qui sont des états liés constitués de quarks (tels le proton et le neutron). Des expériences, dont le principe est de faire entrer en collision des noyaux lourds ultrarelativistes, sont en cours (SPS, AGS) ou en projet (RHIC, LHC) dans le but de créer en accélérateur les conditions de température et de densité nécessaires pour réaliser cette transition de phase.

La théorie des champs à température finie est alors apparue comme l'un des outils théoriques permettant de décrire la phase déconfinée; des formalismes alternatifs à celui de MATSUBARA, plus proches de la formulation habituelle de la théorie des champs, ont été mis au point. A côté du travail d'étude phénoménologique qui consiste à faire des prédictions sur des quantités physiques susceptibles de différencier la phase plasma de la phase confinée, la théorie des champs à température finie a suscité beaucoup de travaux sur le formalisme lui-même, car il est apparu qu'en dépit de ses nombreuses similarités avec la théorie des champs ordinaire, ce formalisme en diffère de façon cruciale par certains aspects.

Cette brève introduction reflète également la dualité des travaux présentés dans cette thèse, divisée par conséquent en une première partie relativement formelle, suivie d'une partie où je me suis intéressé à la production de photons

par un plasma de quarks et de gluons.

Ainsi, je vais dans cette partie étudier quelques aspects formels de la théorie des champs à température finie.<sup>1</sup> En effet, après la première formulation de la théorie des champs à température finie par MATSUBARA est apparu le formalisme dit “à temps réel”, développé par SCHWINGER, MAHANTHAPPA et KELDYSH. Ce formalisme, ou l’un de ses dérivés, est celui que j’utilise tout au long de cette thèse. Bien qu’apparemment plus proche techniquement de la théorie des champs ordinaire, certains aspects de ce formalisme sont toujours débattus à l’heure actuelle, parfois même au niveau de ses fondements mêmes.

L’organisation de cette partie est la suivante. Tout d’abord, je vais commencer par un chapitre d’introduction à la théorie des champs à température finie. Rien de nouveau n’est à attendre de ce chapitre excepté peut être la section sur l’invariance vis à vis du contour qui est peu commune, mais il sera tout de même utile pour fixer les notations qui seront utilisées ainsi que pour introduire les problèmes discutés ensuite. Le second chapitre est dédié à la discussion de la représentation spectrale des fonctions de GREEN thermiques. Il s’agit d’un outil très puissant qui permet de ramener l’étude des propriétés générales des fonctions de GREEN à celles d’objets plus simples. Ainsi, l’étude des fonctions à deux points se ramène par cette méthode à celle des propriétés du propagateur libre. Le chapitre suivant expose un travail concernant la justification du formalisme à temps réel. Il ne s’agit naturellement pas de remettre en cause un formalisme qui a par ailleurs fait ses preuves, mais d’apporter un éclairage nouveau sur certains aspects de sa justification.

Le quatrième chapitre a vu le jour à l’occasion d’une polémique à propos de la généralisation en théorie des champs à température finie des règles de Cutkosky servant à calculer la partie imaginaire d’une fonction de GREEN. J’exposerai les tenants et les aboutissants de cette polémique, sa résolution, ainsi qu’une extension de ces règles à quelques formulations alternatives.

Enfin, le dernier chapitre traite d’un problème relié à la désintégration du pion dans un milieu chaud. Plus précisément, il apparaît que le diagramme triangulaire qui couple le pion neutre à deux photons dans un modèle  $\sigma$  linéaire ne possède pas une limite unique lorsque les impulsions du pions et des deux photons tendent vers zéro. Cette propriété, spécifique à la théorie des champs à température finie, fait que des calculs effectués avec des conditions cinématiques différentes donnent des résultats différents pour cette limite d’impulsion nulle, ce qui avait rendu la situation quelque peu confuse.

---

<sup>1</sup>Ce qui néanmoins ne signifie pas que la physique sera exclue de cette partie.

# Chapitre 1

## Éléments de théorie des champs à température finie

—[...] Mon ami Fahoth, montre nous pour commencer quelque chose d’un peu simple.

MIKHAIL BOULGAKOV  
*Le maître et Marguerite*

**E**n théorie des champs à température nulle [1, 2, 3], les quantités observables sont les sections efficaces que l’on peut par exemple mesurer dans les collisions réalisées en accélérateur. Ces sections efficaces peuvent être elles-mêmes reliées à des amplitudes de transition, lesquelles sont finalement connectées via les formules dites “de réduction” aux fonctions de GREEN qui sont les objets que l’on peut calculer par les techniques de la théorie des champs. Les fonctions de GREEN sont dans ce contexte des valeurs moyennes de produits de champs, la moyenne étant effectuée sur l’état dit du “vide quantique”.

Supposons maintenant qu’au lieu de disposer de deux particules que l’on fait entrer en collision, nous disposions d’un échantillon de plasma constitué de particules de même nature que précédemment. Pour ce nouveau système, il est vraisemblable que des paramètres de nature thermodynamique comme la température, la pression ou la densité vont devenir pertinents. En d’autres termes, des effets collectifs vont maintenant être susceptibles d’influencer la physique du système. L’objet de la théorie des champs à température finie [4, 5, 6] est précisément d’étendre la théorie des champs ordinaire de façon à décrire les propriétés d’un tel plasma.

Il est également à peu près clair que les particules individuelles ne peuvent pas constituer des états asymptotiques pour un tel système, car il est impossible de suivre à la trace une particule donnée immergée dans un échantillon de

plasma. Les objets directement observables sont les particules interagissant faiblement qui parviennent à s'échapper du plasma, et dont le taux de production peut être mesuré. Ce n'est cependant pas dans ce chapitre que je vais justifier le fait que ces quantités observables peuvent être reliées à des fonctions de GREEN qui sont des généralisations assez naturelles des fonctions de GREEN utilisées en théorie des champs ordinaire, même s'il ne s'agit plus de sections efficaces de collisions mettant en jeu un petit nombre de particules (voir le chapitre 6). Très brièvement, les fonctions de GREEN sont définies par la moyenne canonique  $\langle A \rangle \equiv \text{Tr}(e^{-H/k_B T} A) / \text{Tr}(e^{-H/k_B T})$  en lieu et place de  $\langle A \rangle \equiv \langle 0|A|0 \rangle$  où  $|0\rangle$  est l'état fondamental du système d'Hamiltonien  $H$ , et il s'agit dans ce chapitre de présenter l'extension que doivent subir les règles de FEYNMAN habituelles pour qu'elles permettent le calcul perturbatif de ces nouvelles fonctions de GREEN.

## 1.1 Approche covariante et thermodynamique relativiste

### 1.1.1 Introduction au problème

De par la nature des systèmes que la théorie des champs à température finie se propose d'étudier, il existe un référentiel privilégié qui est le référentiel de repos du plasma. Ce référentiel est défini comme étant celui dans lequel la vitesse hydrodynamique<sup>1</sup> du plasma est nulle. Par conséquent, l'invariance de LORENTZ de la théorie semble explicitement brisée par l'existence d'un tel référentiel et la stratégie la plus simple (et également la plus fréquemment adoptée) consiste à formuler la théorie dans ce référentiel particulier. C'est la position que j'adopterai dans la suite de cette thèse.

Toutefois, il peut être intéressant de se demander si une formulation covariante pourrait être obtenue si l'on introduisait un paramètre supplémentaire qui serait la quadri-vitesse  $U_\mu$  du plasma dans un référentiel à priori quelconque. A cet effet, le premier problème auquel on se heurte est celui de donner une formulation covariante de la mécanique statistique et de la thermodynamique. Cette question en apparence simple a vu le jour peu après 1905 avec PLANCK et EINSTEIN, et a été l'objet de nombreuses controverses<sup>2</sup> par la suite, la plus notoire étant celle initiée par OTT dans les années 60. La plupart de ces controverses gravitent autour de la question de la température d'un objet en mouvement. Afin d'entrevoir simplement les difficultés qui surgissent ici, supposons que l'on décide de définir cette température<sup>3</sup> en étendant aux objets en mou-

<sup>1</sup>Tant que l'on se limite à un plasma à l'équilibre, il n'y a pas lieu de préciser davantage, car une seule vitesse caractérise le mouvement du plasma dans un référentiel donné.

<sup>2</sup>Parmi les ouvrages suivants, [7, 8] considèrent la question comme triviale et y consacrent seulement quelques lignes. Tolman dans [9] y passe plus de temps, mais considère la question comme totalement résolue, et [10, 11] apportent des réponses beaucoup plus nuancées. Dans cette dernière référence, on trouve une discussion de diverses approches à cette question.

<sup>3</sup>Dans ce paragraphe, la température dont je parle n'est pas la température absolue, mais une quantité qui est parfois qualifiée de *température empirique*. Pour la distinguer de la température absolue, je la noterai par la lettre  $\theta$ . Une relation biunivoque, dépendant du

vement la façon dont on la mesure. Par exemple, si l'on ramène la mesure de la température à celle de la longueur d'une colonne d'alcool, le résultat obtenu<sup>4</sup> sera  $\theta = \theta_o$  si le thermomètre est orthogonal à la vitesse de l'objet et  $\theta = \theta_o \sqrt{1 - v^2/c^2}$  si le thermomètre est parallèle à la vitesse. On voit donc sur cet exemple qu'une méthode apparemment anodine de mesure de cette quantité conduit à des résultats ambigus si on essaye de l'appliquer à un objet en mouvement.

Le but de cette section est de faire le point sur les tenants et les aboutissants de cette question. Je commencerai par y rappeler les fondements de la thermodynamique classique, car ils nous éclaireront quelque peu sur le statut de la température absolue. Ensuite, à l'aide d'un exemple, je montrerai qu'il n'est pas indispensable de disposer d'une formulation de la théorie des champs à température finie dans un référentiel arbitraire. En effet, la connaissance du formalisme dans le référentiel propre du plasma suffit pour faire des prédictions pour n'importe quel référentiel. Cet exemple montrera également que la question de la "température d'un corps en mouvement" est une fausse question qui présente assez peu d'intérêt, car la température n'est pas mesurable en tant que telle. Le paragraphe suivant donnera l'expression de l'opérateur densité dans l'ensemble grand-canonique, et dans un référentiel arbitraire. Ensuite, dans la dernière partie de cette section, je reviendrai sur la thermodynamique d'un corps en mouvement. Après y avoir exposé la controverse entre les approches de PLANCK et OTT, je terminerai par la formulation moderne de la thermodynamique relativiste.

### 1.1.2 Thermodynamique dans le référentiel de repos

Avant de voir comment on peut décrire un système macroscopique en mouvement d'un point de vue thermodynamique, il n'est pas inutile de donner un bref exposé des principes de base de la thermodynamique d'un système au repos<sup>5</sup>.

Tout commence lorsqu'on remarque que si l'on additionne toutes les formes d'énergie que l'on rencontre au niveau macroscopique (*i.e.* sans se préoccuper des détails microscopiques du système), on obtient une énergie macroscopique  $E_M$  qui n'est pas conservée. De façon plus formelle, si l'on note  $e_M$  la densité volumique d'énergie macroscopique, et  $\mathbf{j}_M$  la densité du flux d'énergie macroscopique, on obtient une équation locale du type de

$$\text{div } \mathbf{j}_M + \frac{\partial e_M}{\partial t} = \sigma_M , \quad (1.1)$$

où  $\sigma_M$  est un terme de source qui est non nul du fait de la non-conservation de cette énergie macroscopique. C'est le cas par exemple de l'énergie électroma-

---

processus de mesure que l'on utilise, existe entre cette quantité et la température absolue.

<sup>4</sup>Dans cette section, les quantités mesurées dans le référentiel de repos du plasma porteront un indice zéro.

<sup>5</sup>Puisque dans ce paragraphe sur la thermodynamique classique, il n'y a aucune ambiguïté quant au choix du référentiel, j'ignore les indices *o* rappelant que les quantités considérées sont définies dans le référentiel propre du système.

gnétique pour laquelle le terme de source est  $\sigma = -\mathbf{j}_{\text{el}} \cdot \mathbf{E} \neq 0$  où  $\mathbf{j}_{\text{el}}$  est le courant électrique. Comme la physique s'accommode mal d'une situation où l'énergie semble ne pas être conservée, le premier principe de la thermodynamique postule l'existence d'une forme d'énergie ayant échappé à cette description, appelée énergie interne et notée  $U$ , telle que la somme  $E = U + E_M$  soit localement conservée<sup>6</sup>. En d'autres termes, le terme de source d'énergie interne est égal à  $\sigma_u = -\sigma_M$ . Le premier principe de la thermodynamique ajoute que l'énergie interne est une fonction d'état<sup>7</sup> du système, c'est à dire qu'elle ne dépend que d'un petit nombre de paramètres décrivant l'état thermodynamique du système.

Une conséquence du premier principe est que la variation d'énergie totale d'un système est la somme de deux contributions :

$$dE = \delta W + \delta Q, \quad (1.2)$$

le flux d'énergie macroscopique à travers la frontière du système, appelé travail, et le flux d'énergie interne, appelé chaleur (les termes de source locale ne contribuent pas car ils se compensent). On voit donc que la distinction entre chaleur et travail dépend de la façon dont on a divisé l'énergie totale en deux termes. Nous verrons plus loin que la définition de la température absolue en dépend également. Si il existe une façon relativement naturelle d'opérer cette division lorsque le corps est au repos, il n'en est pas de même lorsque le système est en mouvement, et c'est ce qui a autorisé plusieurs formulations concurrentes de la thermodynamique d'un système en mouvement. En particulier, il semble que la controverse entre les approches de PLANCK et celle de OTT ait sa source dans ce détail [11].

Passons maintenant au deuxième principe et à l'entropie. J'adopterai plutôt ici l'énoncé "historique" du second principe qui me semble moins obscur que sa forme moderne<sup>8</sup>, et qui postule (sur la base de considérations expérimentales en rapport avec le fonctionnement des machines thermiques) qu'un système ne peut pas convertir en travail toute la chaleur qu'il reçoit. Une conséquence assez immédiate de cet énoncé est qu'au voisinage de tout état d'équilibre, il existe un état qui ne peut pas être atteint à partir du premier au moyen d'une transformation adiabatique réversible (ce résultat est connu aussi sous le nom de principe de CARATHEODORY). Si on classe les états d'équilibre en classes d'équivalence regroupant les états pouvant être connectés par des transformations adiabatiques réversibles, ce résultat indique qu'il y a plusieurs classes d'équivalence distinctes. On peut alors définir une fonction  $S$ , appelée entropie, qui associe un

---

<sup>6</sup>Cela ne signifie pas que l'énergie totale du système va être constante. En effet, il peut toujours échanger de l'énergie avec le reste de l'univers au travers de ses frontières car le premier principe ne contraint aucunement les flux d'énergie. Tout va donc dépendre des conditions aux limites qui affectent le système.

<sup>7</sup>C'est là que réside véritablement l'aspect thermodynamique de ce principe. Tant qu'on se limite à lui faire dire que l'énergie totale doit être conservée, il s'agit encore de mécanique.

<sup>8</sup>L'énoncé moderne du second principe postule l'existence d'une fonction d'état  $S$ , appelée entropie, dont le terme de source  $\sigma_s$  est toujours positif ou nul. Naturellement, cette façon concise de présenter les choses est très efficace s'il s'agit de faire des calculs, car elle est d'emblée opérationnelle. Par contre, on ne voit pas très bien ce qui justifie à priori un tel postulat.

nombre à chaque classe d'équivalence (et par extension, elle associe un nombre à chaque état). Cette fonction prend donc la même valeur sur tous les états pouvant être reliés par une transformation adiabatique réversible. A cause du résultat précédent, il est possible de construire une telle fonction qui soit non triviale dans le sens où elle ne prend pas la même valeur sur tous les états. Par construction, la variation  $dS$  de cette fonction d'état s'annule en même temps que la chaleur échangée  $\delta Q$ . Comme il s'agit d'infiniment petits du premier ordre, on en déduit que ces deux quantités sont proportionnelles lors d'une transformation réversible infinitésimale :

$$\exists \alpha \quad , \delta Q = \alpha dS . \quad (1.3)$$

Ensuite, on prouve [11] qu'il est possible de choisir une fonction  $S$  ayant les propriétés requises ci-dessus et telle que la constante de proportionnalité  $\alpha$  ne dépende que de la température empirique  $\theta$  du système :  $\alpha = \alpha(\theta)$ . On peut même prouver que la valeur que prend ce nombre  $\alpha(\theta)$  est indépendante de la procédure qui sert à mesurer cette température empirique. En d'autres termes, il existe une température absolue, que l'on note  $T$  et telle que  $dS = \delta Q/T$  lors d'une transformation réversible et vérifiant dans le cas général

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} . \quad (1.4)$$

Enfin, on démontre la relation suivante pour une transformation réversible

$$dE = TdS + \delta W , \quad (1.5)$$

où  $\delta W$  est le travail reçu par le système (son expression dépend des termes que l'on inclut dans l'énergie macroscopique), qui est à la base de tous les développements ultérieurs en thermodynamique. Comme en général l'énergie macroscopique d'un système ne varie ( $dE_M = 0$ ) pas dans le contexte des problèmes usuels de thermodynamique,<sup>9</sup> cette relation est habituellement simplifiée en

$$dU = TdS + \delta W . \quad (1.6)$$

### 1.1.3 Une thermodynamique covariante est-elle indispensable ?

Avant d'aller plus loin, on peut se demander si une formulation covariante de la théorie des champs à température finie est vraiment indispensable, même pour calculer les propriétés d'un plasma observé depuis un référentiel qui n'est pas son référentiel propre.

Cette question est en effet pertinente dans la mesure où les quantités directement observables pour un système ne sont pas ses paramètres thermodynamiques. Cela est apparu de manière claire dans le paragraphe précédent avec

---

<sup>9</sup>En effet, on suppose usuellement que le système est immobile, et se trouve dans un champ extérieur constant, de sorte que  $dE_M = 0$ .

la température. On ne mesure pas la température absolue  $T$  directement, mais un paramètre  $\theta$  appelé *température empirique*, qui peut être une longueur, une pression, etc. Ensuite, cette grandeur  $\theta$  est convertie dans la température absolue  $T$  au moyen de la fonction  $\alpha(\theta)$ , qui est caractéristique de la grandeur  $\theta$  que l'on utilise. En d'autres termes, ce qu'on appelle communément un thermomètre est plutôt une règle graduée ou un baromètre étalonnés pour afficher une mesure de la température.

Par ailleurs, lorsque  $\theta$  est une longueur ou une pression, on connaît sans ambiguïté la façon dont ce paramètre se transforme dans un changement de référentiel. On peut donc imaginer qu'on mesure  $\theta$  dans le référentiel de l'observateur, qui n'est pas nécessairement celui du plasma (le thermomètre est immobile dans le référentiel du plasma, mais en mouvement par rapport à l'observateur), et qu'on applique ensuite à la valeur trouvée la transformation de LORENTZ qui nous ramène à la grandeur  $\theta_o$  qu'on aurait mesurée dans le référentiel du plasma. On pourra ensuite déduire les paramètres thermodynamiques du plasma dans son référentiel de repos, utiliser les lois de la thermodynamique dans le référentiel de repos pour en déduire les valeurs de certaines quantités observables, et transformer ces dernières au moyen d'une transformation de LORENTZ inverse de la précédente pour les convertir en quantités que l'on pourra directement mesurer dans le référentiel de l'observateur. En résumé, sans rien connaître de la forme que pourrait prendre la thermodynamique dans son référentiel, l'observateur peut faire des prédictions concernant le système en mouvement.

Afin d'illustrer cette remarque, considérons un exemple concret plus proche des problèmes rencontrés en théorie des champs à température finie. Supposons par exemple que nous disposions d'un échantillon de plasma, enfermé dans une boîte, et qu'on l'entoure de détecteurs mesurant le spectre des photons qu'il émet. Ces détecteurs permettent de mesurer la distribution  $f_o(E_o, \hat{\mathbf{p}}_o)$  telle que  $f_o(E_o, \hat{\mathbf{p}}_o)dE_o d\Omega_o$  soit le nombre de photons émis avec une énergie comprise entre  $E_o$  et  $E_o + dE_o$ , et une direction dans l'angle solide  $d\Omega_o$  autour de la direction  $\hat{\mathbf{p}}_o$ , par unité de temps et par unité de volume de l'échantillon de plasma. Cette distribution peut être calculée au moyen de la théorie des champs à température finie lorsque le plasma est au repos dans le référentiel du détecteur.<sup>10</sup> Elle dépend alors des constantes de couplage et de la température absolue  $T_o$  du plasma dans son référentiel propre. Naturellement, on sait comment obtenir la loi de distribution des photons observés dans un référentiel qui serait en mouvement par rapport à la source des photons, par des arguments élémentaires de cinématique relativiste. Comme illustré sur la figure 1.1, la distribution ne sera plus isotrope, et les photons seront en moyenne plus durs vers l'avant, et plus mous vers l'arrière. Plus précisément, on va obtenir une nouvelle distribution  $f(E, \hat{\mathbf{p}})$ , qui dépend implicitement de la température  $T_o$  du plasma dans son référentiel propre et de la quadri-vitesse  $U^\mu$  du plasma dans le nouveau référentiel.

En d'autres termes, on peut facilement obtenir la loi de distribution des pho-

---

<sup>10</sup>Ce problème fera l'objet de toute la deuxième partie de cette thèse.



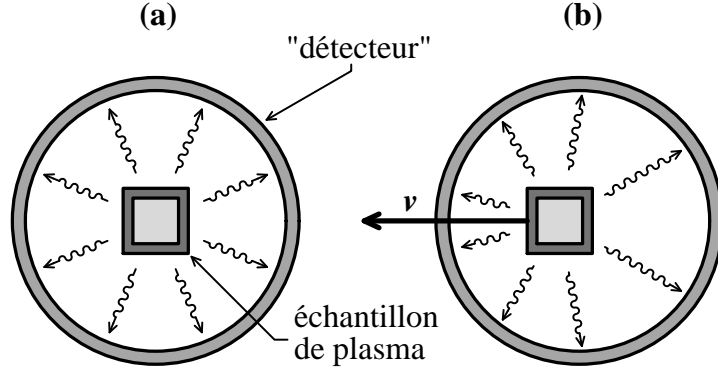
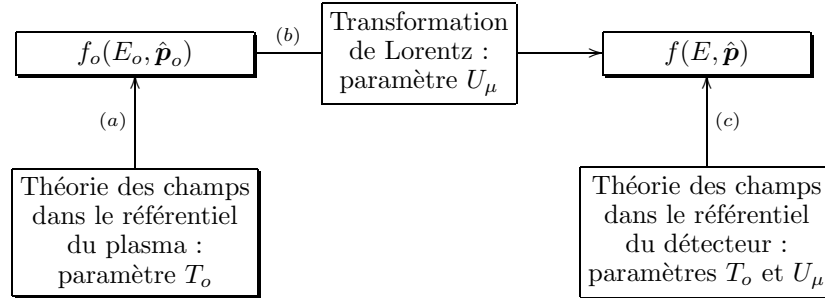


FIG. 1.1 — Distribution de photons dans le référentiel de repos du plasma, et dans un référentiel en mouvement.

tons dans n'importe quel référentiel en utilisant uniquement la formulation de la théorie des champs à température finie dans le référentiel du plasma. Cela requiert cependant deux étapes : (a) : trouver la distribution de photons dans le référentiel de repos du plasma à l'aide de la théorie des champs à température finie formulée dans ce référentiel, et (b) : transformer la distribution obtenue pour l'exprimer dans un référentiel arbitraire. D'un point de vue pratique, l'intérêt d'avoir une formulation de la théorie des champs à température finie dans un référentiel arbitraire serait de court-circuiter ce processus en deux étapes,<sup>11</sup> comme illustré sur le schéma suivant :



Puisqu'on sait que la distribution  $f(E, \hat{\mathbf{p}})$  dépend de la température  $T_o$  et de la quadri-vitesse  $U_\mu$ , il est a priori évident que le formalisme qui permettrait de la calculer en une seule étape doit contenir ces deux quantités comme paramètres.

<sup>11</sup>Une telle situation est en fait déjà connue en théorie des champs à température nulle, pour les collisions sur cible fixe par exemple. Les calculs sont plus simples à faire dans le référentiel du centre de masse (l'analogue du référentiel propre du plasma), qui est distinct du référentiel du détecteur.

Par contre, il ne semble aucunement nécessaire de définir quelque chose qui serait la “température du plasma en mouvement”, ce qui va dans le sens de la remarque faite plus haut sur le fait que la température absolue n’est pas observable par elle même. Comme on le verra un peu plus loin, c’est là le point de vue adopté dans la formulation moderne de la thermodynamique covariante. La question de la température d’un objet en mouvement n’est même plus posée, et ce formalisme se contente d’utiliser les paramètres  $T_o$  et  $U_\mu$ . Il faut également insister sur le fait que la formulation covariante de la thermodynamique est une question présentant un intérêt essentiellement académique dans la mesure où on peut très bien se passer d’un tel formalisme en pratique.

#### 1.1.4 Mécanique statistique covariante

La première étape vers une formulation covariante de la théorie des champs à température finie consiste à généraliser à un référentiel arbitraire le point de départ de la mécanique statistique, à savoir le lien entre l’opérateur densité et les quantités conservées, dans l’ensemble canonique ou grand-canonique. Contrairement à la thermodynamique relativiste, cette question fait l’objet d’un consensus depuis longtemps.

A cet effet, il faut commencer par rappeler quelles sont les propriétés qu’on attend de cet opérateur densité  $\rho$  :

- $\rho$  est une fonction multiplicative, *i.e.* si on divise un système  $\mathcal{S}$  en deux sous-systèmes  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ , alors on a  $\rho = \rho_1 \rho_2$ .
- Le théorème de LIOUVILLE implique que  $\rho$  est conservé le long d’une trajectoire de phase. Cela implique que  $\rho$  est une fonction des seules quantités conservées du système.
- $\rho$  est une quantité invariante de LORENTZ.

On déduit de ces trois propriétés le résultat suivant :  $\ln(\rho)$  doit être une combinaison linéaire scalaire de quantités conservées additives. Parmi ces quantités conservées additives, on trouve les quatre composantes  $P^\mu$  du vecteur énergie-impulsion, et un certain nombre de charges conservées  $Q_a$ . En d’autres termes, il existe un quadri-vecteur  $\beta_\mu$  et une série de scalaires  $\alpha_a$  tels que<sup>12</sup>

$$\ln(\rho) = -\beta_\mu P^\mu + \sum_a \alpha_a Q_a , \quad (1.7)$$

à une constante additive près pour la normalisation.

Le quadri-vecteur  $\beta_\mu$  doit se réduire à  $(\beta_o \equiv 1/T_o, \mathbf{0})$  dans le référentiel propre du plasma. Par conséquent, dans un référentiel arbitraire, il doit s’écrire  $\beta_\mu = \beta_o U_\mu$ . On peut également suivant l’usage écrire  $\alpha_a \equiv \beta_o \mu_a$ , ce qui donne

---

<sup>12</sup>On suppose implicitement que l’objet auquel on s’intéresse n’est pas en rotation de sorte que son moment cinétique  $M^{\mu\nu}$  est nul.

la forme finale pour l'opérateur densité dans un référentiel arbitraire<sup>13</sup>

$$\rho \propto \exp(-\beta_o U_\mu P^\mu + \beta_o \sum_a \mu_a Q_a) . \quad (1.8)$$

C'est là le seul résultat dont on a besoin pour donner une formulation covariante de la théorie des champs à température finie. On peut noter qu'ici non plus, on n'a pas eu besoin d'introduire le concept de "température du système en mouvement".

### 1.1.5 Formulation covariante de la thermodynamique

#### Introduction

Je me propose maintenant de discuter comment on peut obtenir une description thermodynamique d'un système en mouvement. On souhaiterait si possible arriver à une formulation covariante, si l'on s'autorise à introduire la vitesse  $U^\mu$  du système comme paramètre additionnel. Signalons tout d'abord que le principe de relativité dit que si l'on décrit un système depuis son référentiel de repos, la forme des principes de la thermodynamique est indépendante de son état de mouvement par rapport au reste de l'univers. Par contre, il ne dit rien de spécial sur la forme qu'ils doivent prendre lorsque le système est en mouvement par rapport à l'observateur, hormis le fait que les prédictions physiques doivent être les mêmes pour tous les observateurs.

#### Controverse Ott-Planck

C'est cette question qui a fait couler beaucoup d'encre dans les années soixante après que OTT ait sérieusement remis en cause dans l'article [12] l'approche mise sur pied dès 1907 par PLANCK et EINSTEIN. L'objet de la controverse résidait dans les lois de transformation de la chaleur et de la température lorsqu'on change de référentiel.

Le point de départ commun des deux approches réside dans le jeu suivant de lois de transformation, dont on pourra trouver une justification dans [9] :

$$V = V_o \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (1.9-a)$$

$$P = P_o \quad (1.9-b)$$

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{U_o + P_o V_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.9-c)$$

$$U = \frac{U_o + v^2 P_o V_o / c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} , \quad (1.9-d)$$

pour le volume, la pression, l'impulsion, et l'énergie interne. A cela, ils ajoutent le fait que l'entropie est un scalaire ( $S = S_o$ ), ce qui va dans le sens de l'interprétation statistique de l'entropie donnée par BOLTZMANN  $S = k_B \ln \Omega$ . En

<sup>13</sup>Notons qu'on peut obtenir le même résultat en rendant extrémale l'entropie statistique définie par  $S = -\text{Tr}(\rho \ln \rho)$ , sous la contrainte que les quantités  $\text{Tr}(\rho P^\mu)$  et  $\text{Tr}(\rho Q_a)$  sont fixées.

effet,  $\Omega$  étant un nombre d'états, on peut le considérer comme un invariant de LORENTZ. Enfin, tous deux exigent que la forme de l'équation  $\delta Q = TdS$  traduisant le second principe soit conservée. Il en résulte en particulier que dans leur approche,  $\delta Q$  et  $T$  ont la même loi de transformation.

A ce point, les deux approches empruntent des voies différentes. PLANCK exprime le travail  $\delta W$  sous la forme suivante

$$\delta W = -PdV + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} . \quad (1.10)$$

Dans cette équation, le premier terme est le travail des forces de pression lorsque le volume du système change, et le second terme est le travail des forces extérieures qui s'exercent sur le système. En effet, si on écrit la somme des forces extérieures sous la forme  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ , leur travail est  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}dt = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p}$ . A partir de là, en utilisant  $\delta Q = dU - \delta W$  et en utilisant les relations (1.9), il obtient

$$\delta Q = \sqrt{1 - v^2/c^2}(dU_o + P_o dV_o) = \delta Q_o \sqrt{1 - v^2/c^2} . \quad (1.11)$$

Sa loi de transformation pour la température est donc

$$T = T_o \sqrt{1 - v^2/c^2} . \quad (1.12)$$

OTT propose quant à lui une formule différente pour l'expression du travail reçu par le système. En effet, selon lui,  $d\mathbf{p}/dt$  contient à la fois une contribution du travail des forces mécaniques, mais également une contribution qui est liée au fait que la chaleur reçue modifie l'inertie du système. Ainsi, il propose pour la somme des forces extérieures l'expression suivante

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \frac{\delta Q}{dt} \frac{\mathbf{v}}{c^2} . \quad (1.13)$$

En d'autres termes, il affirme que la chaleur  $\delta Q$  reçue par le système entraîne une variation de masse telle que  $dm c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2} = \delta Q$ . Il retranche donc  $(dm/dt)\mathbf{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$  à  $d\mathbf{p}/dt$  pour obtenir la force. A partir de là, son expression pour le travail "purement mécanique" est donnée par

$$\delta W = -PdV + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} - \frac{v^2}{c^2} \delta Q , \quad (1.14)$$

ce qui implique pour la chaleur

$$\delta Q = \frac{\delta Q_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \quad (1.15)$$

Sa loi de transformation de la température est donc donnée par la relation suivante

$$T = \frac{T_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \quad (1.16)$$

Ces deux jeux de lois de transformation sont à l'évidence très différents. On a vu que la différence vient de la manière de répartir la variation d'énergie interne

en travail et chaleur. Il semble en outre difficile de trancher entre l'une ou l'autre de ces deux approches. Cela a permis aux deux camps de s'affronter dans plus d'une centaine d'articles durant les années soixante. Il a également été noté que les prédictions pour les quantités observables obtenues à l'aide de ces deux approches sont identiques. Le consensus actuel consiste en fait à dire qu'il n'existe pas d'expérience permettant de dire comment l'échange d'énergie interne se divise en deux termes. Le choix d'une telle partition est considéré uniquement comme une convention n'ayant aucune incidence sur les prédictions physiques. La formulation moderne de la thermodynamique relativiste contourne soigneusement le problème précédent d'une part en ne faisant jamais appel au concept de température d'un corps en mouvement, et d'autre part en ne divisant pas les échanges d'énergie en chaleur et travail.

### Non causalité des lois phénoménologiques linéaires

Une autre controverse importante, quoique non reliée aux fondements mêmes de la thermodynamique, a concerné la généralisation des relations phénoménologiques reliant les flux de certaines grandeurs aux gradients de grandeurs intensives, comme la loi de FICK et la loi de FOURIER. En effet, ces relations linéaires donnent des équations aux dérivées partielles paraboliques, qui conduisent à une vitesse de propagation infinie pour un excès de température local. En effet, supposons par exemple qu'on ait à un instant initial  $x^o = 0$  un corps à la température  $T_1$  uniforme. A cet instant, on le met en contact au point  $x = 0$  avec un corps de température  $T_2 \neq T_1$ . On peut alors prouver que pour tout  $x^o > 0$  et pour tout point  $x$ , la température est différente de  $T_1$ , même si  $x > cx^o$ . Ce problème existe déjà en thermodynamique non relativiste, mais n'a été considéré comme inacceptable qu'après les tentatives pour formuler une thermodynamique relativiste.

On peut se convaincre que cette violation de la causalité est une conséquence de la structure parabolique de l'équation de FOURIER, qui est elle même une conséquence de l'approximation linéaire pour l'expression du flux de chaleur. Il semble que la solution à ce problème soit de conserver dans ces lois phénoménologiques des termes quadratiques en les gradients, ainsi que des termes de retard. Les vitesses de propagation pour les inhomogénéités de température deviennent alors du même ordre de grandeur que la vitesse du son dans le milieu, ce qui est en accord avec ce que l'on sait des mécanismes microscopiques de transfert de chaleur. On pourra voir à ce sujet [13].

### Formulation moderne

On pourra trouver un exposé relativement récent de cette formulation dans [14], ainsi que de nombreuses références. Dans cette formulation, un état d'un système thermodynamique est décrit par un tenseur énergie-impulsion conservé<sup>14</sup>  $T^{\mu\nu}$ , par un flux d'entropie  $S^\mu$ , et par un ensemble de courants conservés

<sup>14</sup>Cette propriété sous entend le fait qu'on ne sépare pas les échanges d'énergie en chaleur et travail. Une telle division reviendrait à écrire  $T^{\mu\nu}$  comme la somme de deux termes qui ne

$J_a^\mu$ . La relation  $dU = T_o dS + \delta W$  admet la généralisation covariante suivante :

$$\beta_\nu dT^{\mu\nu} = dS^\mu + \sum_a \alpha_a dJ_a^\mu , \quad (1.17)$$

où  $\beta_\nu$  est un quadri-vecteur, et où les  $\alpha_a$  sont des scalaires. Afin de retrouver l'équation habituelle dans le référentiel de repos du système, il faut que le vecteur  $\beta_\nu$  soit donné par

$$\beta_\nu = U_\nu / T_o , \quad (1.18)$$

où  $U_\nu$  est la quadri-vitesse du système, et  $T_o$  sa température absolue dans son référentiel propre.

Lorsque le système est en équilibre, on peut exprimer les vecteurs et tenseurs qui interviennent dans (1.17) de la manière suivante

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)U^\mu U^\nu - P g^{\mu\nu} \quad (1.19\text{-a})$$

$$S^\mu = s U^\mu \quad (1.19\text{-b})$$

$$J_a^\mu = q_a U^\mu , \quad (1.19\text{-c})$$

où les quantités  $\epsilon$ ,  $P$ ,  $s$  et  $q_a$  sont des scalaires de LORENTZ qui sont respectivement la densité d'énergie, la pression, la densité d'entropie, et la densité de charge  $Q_a$ , mesurées dans le référentiel propre.

Si on reporte les relations (1.18) et (1.19) dans (1.17), on obtient deux équations distinctes puisque  $U_\mu dU^\mu = 0$ . Les termes proportionnels à  $U^\mu$  donnent une forme du second principe qui est plus familière, et qui ne fait appel qu'à des invariants :

$$\frac{d\epsilon}{T_o} = ds + \sum_a \alpha_a dq_a . \quad (1.20)$$

Les termes proportionnels à  $dU^\mu$  donnent la relation

$$P = -\epsilon + T_o s + \sum_a T_o \alpha_a q_a . \quad (1.21)$$

Si on note  $\mu_a \equiv T_o \alpha_a$  les potentiels chimiques, on retrouve la relation de GIBBS-DUHEM. On peut également obtenir la pression en fonction des seuls courants  $S^\mu$  et  $J_a^\mu$  et du tenseur énergie-impulsion, à l'aide de la relation

$$P \beta^\mu = -\beta_\nu T^{\mu\nu} + S^\mu + \sum_a \alpha_a J_a^\mu . \quad (1.22)$$

Comme on le voit, la direction prise ici pour formuler la thermodynamique d'un corps en mouvement se limite à une "covariantisation minimale" des équations connues pour la thermodynamique du corps au repos.

---

sont pas conservés individuellement.

## 1.2 Principes de base

### 1.2.1 Prélude

En dépit de ce qui a été exposé dans la section précédente, nous n'exploiterons pas la possibilité de formuler la théorie des champs à température finie dans un référentiel arbitraire, car le formalisme qui en découlerait n'apporterait rien de plus que ce que l'on peut dire depuis le référentiel de repos du plasma, tout en entraînant des complications techniques importantes.<sup>15</sup> Par conséquent, dans toute la suite, je me limiterai au référentiel de repos du plasma. Il conviendra cependant d'avoir à l'esprit le fait que la quadri-vitesse  $U^\mu$  du plasma peut jouer un rôle, notamment lorsqu'il s'agit de faire la liste des termes pouvant apparaître dans un tenseur.

Afin d'illustrer les principes fondamentaux de la théorie des champs à température finie sans encombrer l'exposition de difficultés techniques annexes et sans rapport avec le fait d'être à température non nulle, je vais considérer dans ce chapitre la théorie d'un champ scalaire réel, excepté vers la fin du chapitre où j'exposerai brièvement les particularités propres à d'autres types de champs. Quelques mots s'imposent ici concernant ce qu'il y a lieu de considérer comme le Lagrangien du système. On suppose toujours que mettre ensemble un grand nombre de particules ne modifie pas la façon dont elles interagissent au niveau microscopique<sup>16</sup>. La conséquence pratique de cette hypothèse est que le Lagrangien qui décrit la dynamique et les interactions que subissent les champs de la théorie est indépendant de l'opérateur densité du système, *i.e.* de l'état statistique dans lequel se trouve le système macroscopique que l'on considère. Par conséquent, le Lagrangien du champ scalaire réel que l'on se propose de considérer ici est le même qu'à température nulle :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (1.23)$$

si l'on envisage une interaction quartique. Dans ce Lagrangien,  $\phi(x)$  désigne le champ dans la représentation de HEISENBERG.

### 1.2.2 Fonctions de Green

Comme on l'a dit plus haut, les fonctions de GREEN qui sont la généralisation la plus naturelle des fonctions de GREEN auxquelles on s'intéresse à température

---

<sup>15</sup>En particulier, il est plutôt compliqué de reproduire ce qui va suivre dans cette section pour un référentiel quelconque. On pourra voir [15], qui procède à la quantification du système sur un hyperplan de genre espace arbitraire, dans un référentiel également arbitraire. Citons cependant le résultat : dans le formalisme à temps réel, il suffit de faire la substitution suivante au niveau des poids statistiques  $n_{B,F}(k_o) \rightarrow n_{B,F}(K_\mu U^\mu)$  pour avoir les règles de FEYNMAN de ce formalisme dans un référentiel arbitraire.

<sup>16</sup>En mécanique statistique classique, le fait de continuer à utiliser la loi de NEWTON au niveau microscopique est une hypothèse possédant un statut équivalent.

nulle sont les objets suivants[4, 5, 6] :

$$G(x_1, \dots, x_n) \equiv \frac{\text{Tr}(e^{-\beta H} T \phi(x_1) \cdots \phi(x_n))}{\text{Tr}(e^{-\beta H})} \equiv \langle T \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle_\beta, \quad (1.24)$$

où l'on note  $\beta \equiv 1/k_B T$  et où la lettre  $T$  indique que le produit des champs est agencé de sorte à faire apparaître les champs dans l'ordre chronologique :

$$T \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \equiv \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \theta(x_{\sigma(1)}^o - x_{\sigma(2)}^o) \cdots \theta(x_{\sigma(n-1)}^o - x_{\sigma(n)}^o) \times \phi(x_{\sigma(1)}) \cdots \phi(x_{\sigma(n)}), \quad (1.25)$$

où  $\mathfrak{S}_n$  est le groupe des permutations de  $n$  éléments et  $\theta(x)$  la distribution de HEAVISIDE.<sup>17</sup>

Avant d'aller plus loin, il est possible de faire une remarque sur la limite de température nulle de ces fonctions de GREEN. Supposons pour rendre l'argument plus simple que l'Hamiltonien  $H$  possède un état fondamental  $|0\rangle$  dont l'énergie est strictement inférieure à toutes les autres valeurs propres de  $H$ . Comme on peut écrire la trace qui apparaît dans la définition des fonctions de GREEN thermiques sous la forme d'une somme étendue à toutes les valeurs propres de  $H$  :

$$\text{Tr}(e^{-\beta H} A) = \sum_{H|n\rangle = E_n |n\rangle} e^{-\beta E_n} \langle n|A|n\rangle, \quad (1.26)$$

il est immédiat d'obtenir :

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} G(x_1, \dots, x_n) = \frac{\langle 0|T \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)|0\rangle}{\langle 0|0\rangle}. \quad (1.27)$$

Par conséquent, on constate que l'on obtient la définition des fonctions de GREEN de la théorie des champs ordinaire dans cette limite. C'est un des arguments en faveur de l'aspect "naturel" de la définition posée dans l'équation (1.24).

Mentionnons également comment il convient de modifier cette définition si au lieu d'un champ scalaire réel nous considérons un champ auquel sont associées des quantités conservées  $Q_a$ . Dans une telle situation, un potentiel chimique  $\mu_a$  doit être associé à chacune de ces "charges" conservées. Par ailleurs, l'opérateur densité  $\exp(-\beta H)$  qui entre dans la définition des fonctions de GREEN doit être remplacé par  $\exp(-\beta H + \beta \sum_a \mu_a Q_a)$ .

### 1.2.3 Extraction de la dépendance en $\lambda$

En règle générale, il n'est pas possible de calculer exactement les fonctions de GREEN définies plus haut. Cela est par contre possible si les champs considérés sont libres, *i.e.* si la constante de couplage introduite dans le Lagrangien (1.23) est nulle. L'idée de l'approche perturbative est donc de calculer les fonctions de GREEN en supposant que la constante de couplage  $\lambda$  est petite, et en les

<sup>17</sup>Elle est définie par  $\theta(x) = 0$  si  $x < 0$ ,  $\theta(x) = 1$  si  $x > 0$  ( $\theta(0)$  n'est pas défini).



développant en puissances de cette quantité. A température nulle, la dépendance en  $\lambda$  des fonctions de GREEN est contenue uniquement dans les champs de HEISENBERG  $\phi(x)$ , puisque le Lagrangien qui pilote leur dynamique contient un terme dépendant de  $\lambda$ . En examinant la définition des fonctions de GREEN thermiques, on voit d'emblée que l'on a également une dépendance en  $\lambda$  dans l'opérateur densité  $\exp(-\beta H)$ , dont on va devoir tenir compte dans le développement perturbatif des fonctions de GREEN.<sup>18</sup> Nous allons utiliser ici l'approche canonique plutôt que l'approche fonctionnelle, car elle permet de mieux appréhender certaines particularités de la théorie des champs à température finie.

La dépendance en  $\lambda$  du champ  $\phi(x)$  peut être prise en compte en reliant le champ dans la représentation de HEISENBERG aux champs libres de la représentation "interaction". Plus précisément, si l'on se donne un temps initial  $t_I$ , on peut écrire :

$$\phi(x) = U(t_I, x^o) \phi_{\text{in}}(x) U(x^o, t_I) , \quad (1.28)$$

où  $U$  est un opérateur d'évolution défini par

$$U(t_2, t_1) \equiv T_c \exp i \int_{[t_1, t_2] \times \mathbb{R}^3} \mathcal{L}_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}(x)) d^4x , \quad (1.29)$$

$\mathcal{L}_{\text{in}}$  étant le terme d'interaction du Lagrangien. Le symbole  $T_c$  désigne quant à lui un produit ordonné non pas selon les valeurs décroissantes du temps, mais selon les valeurs décroissantes de l'abscisse curviligne<sup>19</sup> le long du contour orienté allant de  $t_1$  à  $t_2$ . A partir de cette définition, on peut vérifier l'identité suivante

$$(\square + m^2)\phi(x) - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{in}}(\phi(x))}{\partial \phi} = U(t_I, x^o)(\square + m^2)\phi_{\text{in}}(x) U(x^o, t_I) . \quad (1.30)$$

Par conséquent, si l'équation du mouvement du champ de HEISENBERG  $\phi(x)$  est satisfaite, le champ  $\phi_{\text{in}}(x)$  vérifie quant à lui l'équation du mouvement d'un champ libre. Cet opérateur d'évolution vérifie les propriétés usuelles qu'on attend de lui :

$$U(t, t) = \mathbb{1} \quad (1.31\text{-a})$$

$$U(t_1, t_2) U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3) . \quad (1.31\text{-b})$$

Afin de prouver la deuxième de ces relations, notons  $A(t_1, t_2, t_3)$  le premier membre de cette équation. On a alors à l'évidence  $A(t_1, t_2, t_2) = U(t_1, t_2)$ , et

<sup>18</sup>Il est en effet impératif de développer simultanément en puissances de  $\lambda$  les champs  $\phi(x)$  et l'opérateur densité, sous peine d'introduire de graves incohérences dans le développement perturbatif (qui apparaissent sous la forme d'une rupture de l'équilibre statistique induite par les corrections perturbatives).

<sup>19</sup>Le produit ordonné selon  $T_c$  est donc identique au produit chronologique usuel si  $t_2 > t_1$ . Si au contraire  $t_2 < t_1$ , ce produit se trouvera ordonné dans l'ordre inverse du produit chronologique. Le but de cette définition est d'avoir  $\partial U(t_1, t_2) / \partial t_2 = -i U(t_1, t_2) \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{L}_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}(t_2, \mathbf{x})) d^3\mathbf{x}$  quelle que soit la position relative de  $t_1$  et  $t_2$ .

l'équation d'évolution de cette quantité vis à vis du temps  $t_3$  est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(t_1, t_2, t_3)}{\partial t_3} &= U(t_1, t_2) \frac{\partial U(t_2, t_3)}{\partial t_3} \\ &= -iU(t_1, t_2)U(t_2, t_3) \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{L}_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}(t_3, \mathbf{x})) d^3 \mathbf{x} . \end{aligned} \quad (1.32)$$

On constate que cet opérateur  $A(t_1, t_2, t_3)$  possède la même équation d'évolution assortie des mêmes conditions initiales que le second membre  $U(t_1, t_3)$ , ce qui prouve l'identité (1.31-b).

Si on introduit un temps  $t_F$ , arbitraire lui aussi, on peut écrire

$$\phi(x) = U(t_I, t_F)U(t_F, x^o)\phi_{\text{in}}(x)U(x^o, t_I) , \quad (1.33)$$

ce qui permet d'écrire le produit chronologique du produit de  $n$  champs de HEISENBERG sous la forme suivante

$$T \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) = T_c \left[ \phi_{\text{in}}(x_1) \cdots \phi_{\text{in}}(x_n) \exp i \int_{(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) \times \mathbb{R}^3} \mathcal{L}_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}(x)) d^4 x \right] , \quad (1.34)$$

où  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont des contours orientés allant respectivement de  $t_I$  à  $t_F$  et de  $t_F$  à  $t_I$  le long de l'axe réel.

Passons maintenant à la dépendance vis à vis de la constante de couplage  $\lambda$  contenue dans l'opérateur densité. Pour cela, il est utile de décomposer l'Hamiltonien du champ considéré en une partie libre  $H_o$  et une partie  $H'$  contenant les interactions (*i.e.* la constante de couplage  $\lambda$ ). La formule de base qui permet d'isoler la dépendance en  $\lambda$  dans  $\exp(-\beta H)$  est ([16, 15] par exemple)

$$e^{-\beta H} = e^{-\beta H_o} T_c \exp i \int_{\mathcal{C}_v \times \mathbb{R}^3} \mathcal{L}_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}(x)) d^4 x , \quad (1.35)$$

où  $\mathcal{C}_v$  est un contour allant de  $t_I$  à  $t_I - i\beta$  parallèlement à l'axe imaginaire.

Notons  $A(\beta) \equiv e^{-\beta H}$  et  $B(\beta)$  le deuxième membre de l'équation (1.35). On a trivialement  $A(0) = \mathbb{1}$  et  $\partial A(\beta)/\partial \beta = -HA(\beta)$ , ainsi que  $B(0) = \mathbb{1}$ . D'autre part,  $B(\beta)$  peut se réécrire sous la forme

$$B(\beta) = e^{-\beta H_o} T_c \exp -i \int_{t_I}^{t_I - i\beta} H'_{\text{in}}(t) dt , \quad (1.36)$$

où l'on note  $H'_{\text{in}}(t) = \exp(iH_o(t-t_I))H'\exp(-iH_o(t-t_I))$  la partie perturbatrice de l'Hamiltonien dans le schéma "interaction". Ceci permet ensuite d'obtenir

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(\beta)}{\partial \beta} &= -H_o B(\beta) - e^{-\beta H_o} H'_{\text{in}}(t_I - i\beta) T_c \exp -i \int_{t_I}^{t_I - i\beta} H'_{\text{in}}(t) dt \\ &= -(H_o + H')B(\beta) = -HB(\beta) . \end{aligned} \quad (1.37)$$

Par conséquent, les opérateurs  $A(\beta)$  et  $B(\beta)$  coïncident en un point et obéissent à la même équation d'évolution. Ils sont donc égaux.

Il est à noter que cette manipulation est rendue possible par la structure très particulière de l'opérateur densité à l'équilibre thermodynamique, puisqu'il peut être dans ce cas considéré comme un opérateur d'évolution opérant une translation temporelle imaginaire.

#### 1.2.4 Fonctionnelle génératrice

Comme à température nulle, il est possible d'extraire toutes les fonctions de GREEN par dérivation fonctionnelle d'une fonctionnelle génératrice. Pour cela, il est nécessaire de coupler le champ  $\phi(x)$  à un terme de source fictif  $j(x)$  que l'on fera tendre vers zéro à la fin du calcul. Pratiquement, cela revient à écrire :

$$G(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta}{i\delta j(x_1)} \cdots \frac{\delta}{i\delta j(x_n)} Z[j] \Big|_{j=0}, \quad (1.38)$$

avec une fonctionnelle génératrice donnée par

$$Z[j] \equiv \left\langle T_c \exp i \int_{(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) \times \mathbb{R}^3} [\mathcal{L}_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}(x)) + j(x)\phi_{\text{in}}(x)] d^4x \right\rangle_{\beta}. \quad (1.39)$$

Ensuite, si l'on utilise la relation entre  $\exp(-\beta H)$  et  $\exp(-\beta H_o)$  établie plus

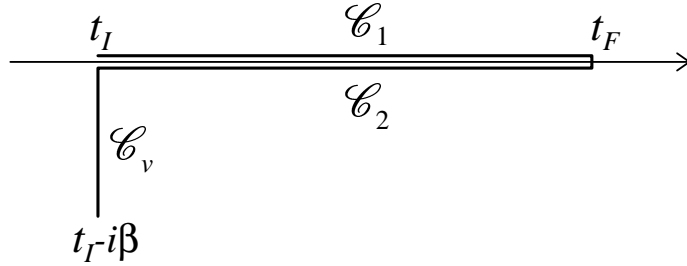


FIG. 1.2 – Le contour d'intégration dans le plan complexe.

haut, on peut récrire cette fonctionnelle génératrice sous la forme :

$$Z[j] = \frac{\text{Tr } e^{-\beta H_o}}{\text{Tr } e^{-\beta H}} \left\langle T_c \exp i \int_{\mathcal{C} \times \mathbb{R}^3} [\mathcal{L}_{\text{in}}(\phi_{\text{in}}(x)) + j(x)\phi_{\text{in}}(x)] d^4x \right\rangle_{\beta_o}, \quad (1.40)$$

où  $\mathcal{C}$  désigne le contour orienté  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_v$  représenté sur la figure 1.2. On doit pour cela étendre la définition de la source  $j(x)$  à la totalité du contour  $\mathcal{C}$ . Dans

cette équation, la notation  $\langle A \rangle_{\beta_o}$  désigne la moyenne thermique de la théorie libre, *i.e.*  $\text{Tr}(e^{-\beta H_o} A) / \text{Tr}(e^{-\beta H_o})$ . On peut dès à présent noter que le préfacteur  $\text{Tr}(e^{-\beta H_o}) / \text{Tr}(e^{-\beta H})$  est inessentiel. En effet, ce facteur est indépendant de la source  $j(x)$  que l'on a couplée au champ  $\phi(x)$ . Il contribuera donc de façon identique à toutes les fonctions de GREEN. On peut aisément vérifier que son rôle est simplement de compenser les diagrammes du vide qui apparaissent dans le développement perturbatif. Par la suite, on ignorera simplement ce facteur ainsi que les diagrammes du vide.

Il est ensuite possible de factoriser la dépendance dans la constante de couplage  $\lambda$  sous la forme d'un opérateur agissant sur une fonctionnelle génératrice libre :

$$Z[j] = \exp \left[ i \int_{\mathcal{C} \times \mathbb{R}^3} \mathcal{L}_{\text{in}} \left( \frac{\delta}{i \delta j(x)} \right) d^4 x \right] Z_o[j] , \quad (1.41)$$

où je note

$$Z_o[j] \equiv \left\langle T_c \exp i \int_{\mathcal{C} \times \mathbb{R}^3} j(x) \phi_{\text{in}}(x) d^4 x \right\rangle_{\beta_o} . \quad (1.42)$$

A partir de cette expression, on peut se livrer sur la fonctionnelle  $Z_o[j]$  à des transformations similaires à celles que l'on effectue à température nulle. A l'aide de la formule de CAMPBELL-HAUSSDORF<sup>20</sup>, on peut dans un premier temps transformer le produit ordonné selon  $T_c$  en un produit ordinaire, ce qui donne :

$$\begin{aligned} T_c \exp i \int_{\mathcal{C} \times \mathbb{R}^3} j(x) \phi_{\text{in}}(x) d^4 x &= \exp i \int_{\mathcal{C} \times \mathbb{R}^3} j(x) \phi_{\text{in}}(x) d^4 x \\ &\times \exp -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{C} \times \mathbb{R}^3} \theta_c(x^o - y^o) j(x) j(y) [\phi_{\text{in}}(x), \phi_{\text{in}}(y)] d^4 x d^4 y , \end{aligned} \quad (1.43)$$

où la fonction  $\theta_c$  est l'extension de la distribution de HEAVISIDE au contour orienté  $\mathcal{C}$ . Si l'on décompose maintenant le champ libre  $\phi_{\text{in}}(x)$  sous la forme  $\phi_{\text{in}}(x) = \phi_{\text{in}}^{(+)}(x) + \phi_{\text{in}}^{(-)}(x)$ , où  $\phi_{\text{in}}^{(+)}(x)$  contient les opérateurs de création et  $\phi_{\text{in}}^{(-)}(x)$  contient les opérateurs d'annihilation<sup>21</sup>, on peut appliquer une deuxième fois la formule de CAMPBELL-HAUSSDORF pour passer à un produit normalement ordonné (*i.e.* où les opérateurs de création sont à gauche des opérateurs d'annihilation) :

$$T_c \exp i \int_{\mathcal{C} \times \mathbb{R}^3} j(x) \phi_{\text{in}}(x) d^4 x =: \exp i \int_{\mathcal{C} \times \mathbb{R}^3} j(x) \phi_{\text{in}}(x) d^4 x :$$

---

<sup>20</sup>Lorsque  $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ , on a l'identité [17] :

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A, B]}.$$

<sup>21</sup>En particulier, cela implique  $\phi_{\text{in}}^{(-)}(x) |0\rangle = 0$  et  $\langle 0| \phi_{\text{in}}^{(+)}(x) = 0$ .

$$\times \exp \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C} \times \mathbb{R}^3} j(x)j(y) \left\{ [\phi_{\text{in}}^{(+)}(x), \phi_{\text{in}}^{(-)}(y)] - \theta_c(x^o - y^o) [\phi_{\text{in}}(x), \phi_{\text{in}}(y)] \right\} d^4x d^4y . \quad (1.44)$$

A ce stade, on peut remarquer que la combinaison de commutateurs qui apparaît entre les crochets sous la deuxième intégrale est en fait proportionnelle à l'opérateur identité, et peut donc être considérée comme un simple nombre complexe. Ainsi, il est possible d'identifier le contenu de ces crochets au résultat de l'action d'une forme linéaire arbitraire normalisée de façon à prendre la valeur 1 sur l'opérateur identité, comme par exemple  $\langle \cdots \rangle_{\beta_o}$ . Cela permet d'écrire la fonctionnelle génératrice libre sous la forme [18] :

$$Z_o[j] = C[j] \exp -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{C} \times \mathbb{R}^3} j(x)j(y) G_o(x, y) d^4x d^4y , \quad (1.45)$$

où l'on note

$$G_o(x, y) \equiv \frac{\text{Tr} (e^{-\beta H_o} T_c \phi_{\text{in}}(x) \phi_{\text{in}}(y))}{\text{Tr} e^{-\beta H_o}} , \quad (1.46)$$

le propagateur libre de la théorie et

$$\begin{aligned} C[j] \equiv & \left\langle : \exp i \int_{\mathcal{C} \times \mathbb{R}^3} j(x) \phi_{\text{in}}(x) d^4x : \right\rangle_{\beta_o} \\ & \times \exp \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C} \times \mathbb{R}^3} j(x)j(y) \left\langle \left[ \phi_{\text{in}}^{(+)}(x) \phi_{\text{in}}^{(-)}(y) + \phi_{\text{in}}^{(+)}(y) \phi_{\text{in}}^{(-)}(x) \right. \right. \\ & \left. \left. + \phi_{\text{in}}^{(+)}(x) \phi_{\text{in}}^{(+)}(y) + \phi_{\text{in}}^{(-)}(x) \phi_{\text{in}}^{(-)}(y) \right] \right\rangle_{\beta_o} d^4x d^4y . \end{aligned} \quad (1.47)$$

## 1.3 Théorème de Wick et règles de Feynman

### 1.3.1 Théorème de Wick

A priori, les règles de FEYNMAN pourraient être rendues singulièrement compliquées par la présence du facteur  $C[j]$  (voir par exemple [19, 20, 21]), lequel est égal à 1 à température nulle. En fait, vérifier que ce facteur est égal à 1 revient à prouver que le théorème de WICK peut être généralisé à la théorie des champs à température finie<sup>22</sup>. Pour ce faire, il faut exprimer les champs  $\phi_{\text{in}}^{(\pm)}(x)$  en fonction des opérateurs de création et d'annihilation

$$\phi_{\text{in}}^{(+)}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} e^{+ik \cdot x} \theta(k^o) \delta(k^2 - m^2) a^\dagger(\mathbf{k}) \quad (1.48\text{-a})$$

$$\phi_{\text{in}}^{(-)}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} e^{-ik \cdot x} \theta(k^o) \delta(k^2 - m^2) a(\mathbf{k}) , \quad (1.48\text{-b})$$

---

<sup>22</sup>Pour une approche plus formelle du théorème de WICK à température finie, on peut voir [22].

et utiliser les relations suivantes

$$\begin{aligned} & \langle a^\dagger(\mathbf{k}_1) \cdots a^\dagger(\mathbf{k}_n) a(\mathbf{k}'_1) \cdots a(\mathbf{k}'_p) \rangle_{\beta_o} \\ &= \delta_{np} \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \langle a^\dagger(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}'_{s(1)}) \rangle_{\beta_o} \cdots \langle a^\dagger(\mathbf{k}_n) a(\mathbf{k}'_{s(n)}) \rangle_{\beta_o}, \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$\langle a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}') \rangle_{\beta_o} = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}} n_B(\omega_{\mathbf{k}}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (1.50)$$

où on note  $\omega_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{(\mathbf{k}^2 + m^2)}$  et où  $n_B(x) \equiv 1/(\exp(\beta x) - 1)$  est la distribution de BOSE-EINSTEIN.

Afin de justifier ces relations, notons que les relations de commutation canoniques  $[H_o, a(\mathbf{k})] = -\omega_{\mathbf{k}} a(\mathbf{k})$  et  $[H_o, a^\dagger(\mathbf{k})] = \omega_{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k})$  impliquent

$$[e^{-\beta H_o}, a(\mathbf{k})] = e^{-\beta H_o} (1 - e^{-\beta \omega_{\mathbf{k}}}) a(\mathbf{k}). \quad (1.51)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \text{Tr}(e^{-\beta H_o} a(\mathbf{k})) &= \text{Tr}(a(\mathbf{k}) e^{-\beta H_o}) \\ &= \text{Tr}(a(\mathbf{k}) e^{-\beta H_o} + [e^{-\beta H_o}, a(\mathbf{k})]) \\ &= \text{Tr}(a(\mathbf{k}) e^{-\beta H_o}) + (1 - e^{-\beta \omega_{\mathbf{k}}}) \text{Tr}(e^{-\beta H_o} a(\mathbf{k})) \end{aligned} \quad (1.52)$$

qui entraîne immédiatement  $\langle a(\mathbf{k}) \rangle_{\beta_o} = 0$ . En itérant cette technique, on prouve ensuite par récurrence que les valeurs moyennes de produits d'opérateur de création et d'annihilation sont non nulles si et seulement si il y a autant de  $a$  que de  $a^\dagger$ . Ensuite, considérant le cas où  $n = p$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \langle a^\dagger(\mathbf{k}_1) \cdots a^\dagger(\mathbf{k}_n) a(\mathbf{k}'_1) \cdots a(\mathbf{k}'_n) \rangle_{\beta_o} \\ &= \sum_{i=1}^n n_B(\omega_{\mathbf{k}_n}) [a(\mathbf{k}'_i), a^\dagger(\mathbf{k}_n)] \left\langle a^\dagger(\mathbf{k}_1) \cdots a^\dagger(\mathbf{k}_{n-1}) \prod_{j \neq i} a(\mathbf{k}'_j) \right\rangle_{\beta_o} \end{aligned} \quad (1.53)$$

en amenant l'opérateur  $a^\dagger(\mathbf{k}_n)$  complètement à droite, et en utilisant ensuite la cyclicité de la trace et la relation de commutation  $e^{-\beta H_o} a^\dagger(\mathbf{k}) = e^{-\beta \omega_{\mathbf{k}}} a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-\beta H_o}$  pour le ramener à sa position initiale. Cette relation prouve l'équation (1.50) lorsque  $n = 1$  et par récurrence, elle s'étend à la relation (1.49).

Appliquant ces relations, on vérifie sans peine que l'on a

$$\begin{aligned} & \left\langle : \exp i \int_{\mathcal{C} \times \mathbb{R}^3} j(x) \phi_{\text{in}}(x) d^4 x : \right\rangle_{\beta_o} \\ &= \left\langle \exp i \int_{\mathcal{C} \times \mathbb{R}^3} j(x) \phi_{\text{in}}^{(+)}(x) d^4 x \times \exp i \int_{\mathcal{C} \times \mathbb{R}^3} j(y) \phi_{\text{in}}^{(-)}(y) d^4 y \right\rangle_{\beta_o} \\ &= \exp - \int_{\mathcal{C} \times \mathbb{R}^3} j(x) j(y) \left\langle \phi_{\text{in}}^{(+)}(x) \phi_{\text{in}}^{(-)}(y) \right\rangle_{\beta_o} d^4 x d^4 y. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Cette relation implique ensuite trivialement  $C[j] = 1$ . La fonctionnelle génératrice libre est donc gaussienne dans les sources  $j(x)$  comme à température nulle, ce qui est une des formes du théorème de WICK.

### 1.3.2 Règles de Feynman

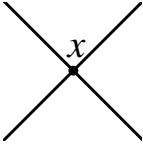
#### Champs scalaires

A l'aide des relations (1.41), (1.45) et (1.46), il est maintenant trivial d'écrire les règles de FEYNMAN permettant de réaliser le développement perturbatif en théorie des champs à température finie. Il s'agit de faire la liste de toutes les topologies contribuant à la fonction de GREEN considérée, avec un nombre de boucles fixé. Le facteur de symétrie des différents diagrammes est le même qu'à température nulle. Ensuite, à chaque vertex du diagramme est associé une intégrale  $-i\lambda \int_{\mathcal{C} \times \mathbb{R}^3} d^4x$ . Enfin, si une ligne du diagramme connecte le vertex se trouvant à la position  $x$  à celui se trouvant à la position  $y$ , on attribue à cette ligne le propagateur  $G_o(x, y)$ . On voit donc que les règles de FEYNMAN à température finie sont très similaires à celles que l'on connaît à température nulle, la seule différence de taille (outre l'expression détaillée du propagateur) étant le fait que l'intégrale sur le temps aux vertex a pour support le contour  $\mathcal{C}$  au lieu de la droite réelle.

---


 $G_o(x, y)$

FIG. 1.3 — Règles de Feynman dans l'espace des coordonnées.


 $-i\lambda \int_{\mathcal{C} \times \mathbb{R}^3} d^4x$ 


---

Comme à température nulle, le développement perturbatif ne devient vraiment applicable en pratique qu'après avoir effectué une transformation de FOURIER. Il en est de même ici. Dans un premier temps, il peut être très utile de limiter la transformée de FOURIER aux composantes spatiales des quadri-vecteurs. En effet, le contour temporel étant différent de ce que l'on connaît à température nulle, la transformation de FOURIER de la variable temporelle sera étudiée avec plus de détails dans une section ultérieure. La mise en oeuvre de cette transformation de FOURIER partielle conduit à des règles de FEYNMAN légèrement modifiées. A chaque vertex, on se contente d'intégrer sur le temps le long du contour  $\mathcal{C}$ , et d'imposer la conservation des impulsions spatiales. Dans chaque boucle indépendante, on intègre sur toutes les valeurs de la tri-impulsion

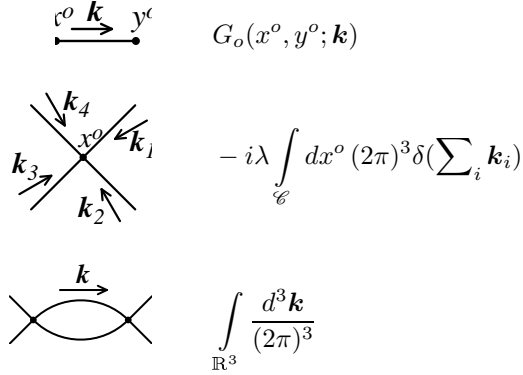
transportée par cette boucle. Enfin, si une ligne reliant le vertex de temps  $x^o$  au vertex de temps  $y^o$  transporte l'impulsion  $\mathbf{k}$ , on lui associe le propagateur

$$G_o(x^o, y^o; \mathbf{k})(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}} G_o(x, y) d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{y} . \quad (1.56)$$

Le propagateur  $G_o(x^o, y^o; \mathbf{k})$  possède une expression analytique très simple. En effet, si l'on utilise les équations (1.46), (1.48) et (1.50), il est immédiat d'obtenir :

$$G_o(x^o, y^o; \mathbf{k}) = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \sum_{\epsilon=\pm} [\theta_c(\epsilon(y^o - x^o)) + n_B(\omega_{\mathbf{k}})] e^{-i\epsilon\omega_{\mathbf{k}}(y^o - x^o)} . \quad (1.57)$$

FIG. 1.4 – Règles de Feynman dans le système de coordonnées mixtes  $(x^o, \mathbf{k})$ .



### Particules transportant une charge

Comme cela est de quelque utilité, nous allons donner aussi l'expression du propagateur libre dans le cas où les champs de la théorie transportent une charge conservée. On dit d'un champ  $\psi_{\text{in}}(x)$  qu'il transporte la charge conservée  $Q$  si l'on a une relation de commutation du type :

$$[Q, \psi_{\text{in}}(x)] = -q\psi_{\text{in}}(x) , \quad (1.59)$$

où  $Q$  est un opérateur hermitique et où  $q \in \mathbb{R}$ . On peut alors vérifier que si  $\psi_{\text{in}}$  est lui aussi hermitique, alors la relation précédente n'est compatible qu'avec  $q = 0$ , ce qui est d'un intérêt limité. L'exemple le plus simple de champ transportant une charge conservée non triviale est celui d'un champ scalaire complexe. L'opérateur associé à un tel champ n'est pas hermitique, ce qui signifie que l'on a des anti-particules distinctes des particules. Si  $a, a^\dagger$  sont les opérateur



d'annihilation et de création des particules et  $b, b^\dagger$  ceux des anti-particules, les relations (1.48) deviennent :

$$\psi_{\text{in}}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) (a(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + b^\dagger(\mathbf{k})e^{ik \cdot x}) \quad (1.60\text{-a})$$

$$\psi_{\text{in}}^*(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \theta(k^0) \delta(k^2 - m^2) (b(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ik \cdot x}) \quad (1.60\text{-b})$$

Les relations de commutation attendues sont réalisées si l'on a les relations de commutation élémentaires suivantes

$$[Q, a(\mathbf{k})] = -qa(\mathbf{k}) , \quad [Q, b^\dagger(\mathbf{k})] = -qb^\dagger(\mathbf{k}) \quad (1.61\text{-a})$$

$$[Q, a^\dagger(\mathbf{k})] = qa^\dagger(\mathbf{k}) , \quad [Q, b(\mathbf{k})] = qb(\mathbf{k}) . \quad (1.61\text{-b})$$

De telles relations impliquent en particulier que les anti-particules transportent une charge opposée à celle des particules. Ensuite, il est aisé d'obtenir les relations de commutation entre l'opérateur densité libre et les opérateurs d'annihilation :

$$a(\mathbf{k})e^{-\beta H_o + \beta \mu Q} = e^{-\beta \omega_{\mathbf{k}} + \beta \mu q} e^{-\beta H_o + \beta \mu Q} a(\mathbf{k}) \quad (1.62\text{-a})$$

$$b(\mathbf{k})e^{-\beta H_o + \beta \mu Q} = e^{-\beta \omega_{\mathbf{k}} - \beta \mu q} e^{-\beta H_o + \beta \mu Q} b(\mathbf{k}) . \quad (1.62\text{-b})$$

Dans une telle théorie, le propagateur libre<sup>23</sup> est

$$D_o(x, y) = \langle T_c \psi_{\text{in}}(x) \psi_{\text{in}}^*(y) \rangle_{\beta_o} . \quad (1.63)$$

En utilisant les relations (1.62) ainsi que les relations de commutation canoniques satisfaites par les opérateurs de création et d'annihilation, on obtient les valeurs moyennes suivantes

$$\langle a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}') \rangle_{\beta_o} = (2\pi)^3 \frac{2\omega_{\mathbf{k}}}{e^{\beta(\omega_{\mathbf{k}} - \mu q)} - 1} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (1.64\text{-a})$$

$$\langle b^\dagger(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}') \rangle_{\beta_o} = (2\pi)^3 \frac{2\omega_{\mathbf{k}}}{e^{\beta(\omega_{\mathbf{k}} + \mu q)} - 1} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (1.64\text{-b})$$

$$\langle b^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}') \rangle_{\beta_o} = \langle b(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}') \rangle_{\beta_o} = \langle a(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}') \rangle_{\beta_o} = \langle b(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}') \rangle_{\beta_o} = 0 ,$$

qui permettent d'obtenir l'expression suivante pour le propagateur libre en présence d'une charge conservée  $Q$  à laquelle est associé le potentiel chimique  $\mu$  :

$$D_o(x^o, y^o; \mathbf{k}) = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \sum_{\epsilon=\pm} \left[ \theta_c(\epsilon(y^o - x^o)) + \frac{1}{e^{\beta(\omega_{\mathbf{k}} + \epsilon \mu q)} - 1} \right] e^{-i\epsilon \omega_{\mathbf{k}}(y^o - x^o)} . \quad (1.65)$$

---

<sup>23</sup>Si la conservation de la charge  $Q$  est préservée par les interactions que subit le champ  $\psi_{\text{in}}$ , alors la structure du contour  $\mathcal{C}$  reste inchangée, car  $Q$  ne dépend pas de la constante de couplage  $\lambda$  contrairement à l'Hamiltonien  $H$ . Le propagateur libre est donc la seule chose qui change dans les règles de FEYNMAN.

## Fermions

Un autre cas qui présente quelques particularités est celui de champs de spin demi-entier. Résumons brièvement les points qui vont être différents par rapport au cas du champ scalaire réel. La différence qui est source de toutes les autres réside dans le fait que la quantification canonique des champs de spin demi-entier doit être effectuée à l'aide de relations d'anti-commutation si l'on veut obtenir une théorie cohérente. La première conséquence apparaît dans la définition du produit chronologique, qui pour le produit de deux opérateurs doit maintenant être défini comme :

$$T_c A(x)B(y) \equiv \theta_c(x^o - y^o)A(x)B(y) - \theta_c(y^o - x^o)B(y)A(x) . \quad (1.66)$$

Ainsi, même si le propagateur libre est toujours la valeur moyenne libre d'un  $T_c$ -produit de deux champs libres, son expression finale va être modifiée. De plus, le fait que les relations canoniques entre les opérateurs de création et d'annihilation soient des relations d'anti-commutation implique que c'est le poids de FERMIDIRAC qui apparaît naturellement dans les quantités telles que  $\langle a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}') \rangle_{\beta_o}$ . Si l'on veut être plus spécifique, on peut considérer par exemple le cas de fermions de spin 1/2, représentés par les spineurs suivants :

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{in}}(x) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \theta(k^o) \delta(k^2 - m^2) (b_\lambda(\mathbf{k}) u^\lambda(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + d_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) v^\lambda(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}) \\ \bar{\Psi}_{\text{in}}(x) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \theta(k^o) \delta(k^2 - m^2) (d_\lambda(\mathbf{k}) \bar{v}^\lambda(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + b_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \bar{u}^\lambda(\mathbf{k}) e^{ik \cdot x}) , \end{aligned}$$

où  $u^\lambda$  et  $v^\lambda$  sont des spineurs indépendants solution de l'équation de DIRAC :

$$(\not{k} - m)u^\lambda(\mathbf{k}) = 0 , \quad (\not{k} + m)v^\lambda(\mathbf{k}) = 0 \quad (\lambda = 1, 2) , \quad (1.68)$$

normalisés au moyen des relations

$$u_\alpha^\lambda(\mathbf{k}) \bar{u}_\beta^\lambda(\mathbf{k}) = (\not{k} + m)_{\alpha\beta} , \quad v_\alpha^\lambda(\mathbf{k}) \bar{v}_\beta^\lambda(\mathbf{k}) = (\not{k} - m)_{\alpha\beta} . \quad (1.69)$$

On peut écrire pour un tel champ un Lagrangien possédant une symétrie  $U(1)$  entraînant l'existence d'une charge conservée  $Q$ . Décidons par convention que l'opérateur  $b_\lambda^\dagger$  crée un quantum de charge  $q$  et que  $d_\lambda^\dagger$  détruit un tel quantum, ce qui fixe toutes les relations de commutation entre  $Q$  et les opérateurs de création et d'annihilation. Avec les relations d'anti-commutation canoniques, nous disposons maintenant de tous les éléments pour obtenir l'expression du propagateur libre  $S_o(x, y) = \langle T_c \Psi_{\text{in}}(x) \bar{\Psi}_{\text{in}}(y) \rangle_{\beta_o}$  :

$$\begin{aligned} S_o(x^o, y^o; \mathbf{k}) &= \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \sum_{\epsilon=\pm} [-\epsilon \omega_{\mathbf{k}} \gamma^o - \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma} + m] \\ &\times \left[ \theta_c(\epsilon(y^o - x^o)) - \frac{1}{e^{\beta(\omega_{\mathbf{k}} + \epsilon \mu q)} + 1} \right] e^{-i\epsilon \omega_{\mathbf{k}}(y^o - x^o)} . \quad (1.70) \end{aligned}$$

Le reste des règles de FEYNMAN est identique à celles exposées plus haut, auxquelles on doit ajouter un signe  $-$  pour chaque boucle de fermions.

## 1.4 Symétrie KMS

Si l'on regarde d'un peu plus près l'expression du propagateur libre donné par l'équation (1.57), on constate qu'il satisfait aux identités suivantes :

$$G_o(t_I, y^o; \mathbf{k}) = G_o(t_I - i\beta, y^o; \mathbf{k}) \quad (1.71\text{-a})$$

$$G_o(x^o, t_I; \mathbf{k}) = G_o(x^o, t_I - i\beta; \mathbf{k}) . \quad (1.71\text{-b})$$

En d'autres termes, le propagateur libre d'un champ scalaire réel prend les mêmes valeurs aux deux extrémités du contour d'intégration  $\mathcal{C}$ . Ces relations sont connues sous le nom d'identités de KUBO-MARTIN-SCHWINGER [23, 24] et elles jouent un rôle extrêmement important en théorie des champs à température finie.

Pour un champ scalaire complexe véhiculant la charge conservée  $Q$ , il est possible de vérifier en utilisant (1.65) que l'on a

$$D_o(t_I, y^o; \mathbf{k}) = e^{\beta\mu q} D_o(t_I - i\beta, y^o; \mathbf{k}) \quad (1.72\text{-a})$$

$$D_o(x^o, t_I; \mathbf{k}) = e^{-\beta\mu q} D_o(x^o, t_I - i\beta; \mathbf{k}) . \quad (1.72\text{-b})$$

Quant au propagateur libre de champs de spin 1/2, il vérifie

$$S_o(t_I, y^o; \mathbf{k}) = -e^{\beta\mu q} S_o(t_I - i\beta, y^o; \mathbf{k}) \quad (1.73\text{-a})$$

$$S_o(x^o, t_I; \mathbf{k}) = -e^{-\beta\mu q} S_o(x^o, t_I - i\beta; \mathbf{k}) . \quad (1.73\text{-b})$$

Cette symétrie est en fait beaucoup plus générale que ne le laissent penser les exemples ci-dessus. Il s'agit en fait d'une conséquence de la structure de l'opérateur densité à l'équilibre thermodynamique,<sup>24</sup> qui est valable pour toutes les fonctions de GREEN, à tous les ordres du développement perturbatif. Considérons la fonction de GREEN suivante pour un champ scalaire réel :

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n) &= \langle T_c \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle_\beta \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \theta_c(x_{\sigma(1)}^o - x_{\sigma(2)}^o) \cdots \theta_c(x_{\sigma(n-1)}^o - x_{\sigma(n)}^o) \\ &\quad \times \langle \phi(x_{\sigma(1)}) \cdots \phi(x_{\sigma(n)}) \rangle_\beta . \end{aligned} \quad (1.74)$$

De cette définition, on déduit

$$\begin{aligned} G((t_I, \mathbf{x}_1), x_2, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n / \sigma(n)=1} \theta_c(x_{\sigma(1)}^o - x_{\sigma(2)}^o) \cdots \theta_c(x_{\sigma(n-2)}^o - x_{\sigma(n-1)}^o) \\ &\quad \times \langle \phi(x_{\sigma(1)}) \cdots \phi(x_{\sigma(n-1)}) \phi(t_I, \mathbf{x}_1) \rangle_\beta \end{aligned} \quad (1.75)$$

---

<sup>24</sup>On peut montrer que les relations KMS peuvent être vues comme la traduction en théorie des champs de relations connues sous le nom de "relations de l'équilibre détaillé" en physique statistique.

ainsi que

$$G((t_I - i\beta, \mathbf{x}_1), x_2 \cdots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n / \sigma(1)=1} \theta_c(x_{\sigma(2)}^o - x_{\sigma(3)}^o) \cdots \theta_c(x_{\sigma(n-1)}^o - x_{\sigma(n)}^o) \\ \times \langle \phi(t_I - i\beta, \mathbf{x}_1) \phi(x_{\sigma(2)}) \cdots \phi(x_{\sigma(n)}) \rangle_\beta . \quad (1.76)$$

En notant que l'opérateur de HEISENBERG  $\phi(x)$  vérifie  $e^{-\beta H} \phi(t, \mathbf{x}) = \phi(t + i\beta, \mathbf{x}) e^{-\beta H}$ , on peut dans la dernière expression commuter  $\phi(t_I - i\beta, \mathbf{x})$  et  $e^{-\beta H}$ . Si l'on utilise ensuite la cyclicité de la trace, on obtient alors l'équation (1.75) (à un décalage près dans les indices muets). Si on remarque également que le fait d'avoir choisi de privilégier le champ  $\phi(x_1)$  ne joue aucun rôle du fait de la totale symétrie qu'induit le  $T_c$ -produit, on a donc prouvé de façon tout à fait générale la relation

$$G(x_1, \cdots, (t_I, \mathbf{x}_i), \cdots, x_n) = G(x_1, \cdots, (t_I - i\beta, \mathbf{x}_i), \cdots, x_n) \quad (1.77)$$

lorsque le champ attaché à l'entrée  $n^o i$  de la fonction de Green est un scalaire réel. Cette relation a été prouvée ici de façon non perturbative. Elle est donc vraie à tous les ordres de la théorie des perturbations, et en particulier au niveau du propagateur libre comme on l'a déjà vérifié.

Si l'entrée  $n^o i$  est attachée à un champ scalaire complexe, la relation précédente devient

$$G(x_1, \cdots, (t_I, \mathbf{x}_i), \cdots, x_n) = e^{\beta \mu q_i} G(x_1, \cdots, (t_I - i\beta, \mathbf{x}_i), \cdots, x_n) , \quad (1.78)$$

où  $q_i$  est la valeur de la charge  $Q$  entrant dans la fonction<sup>25</sup> par la ligne  $n^o i$ . Dans le cas où l'entrée  $n^o i$  est attachée à un fermion de spin 1/2, on a la relation

$$G(x_1, \cdots, (t_I, \mathbf{x}_i), \cdots, x_n) = -e^{\beta \mu q_i} G(x_1, \cdots, (t_I - i\beta, \mathbf{x}_i), \cdots, x_n) . \quad (1.79)$$

## 1.5 Invariance vis-à-vis du contour

Dans le calcul de la fonctionnelle génératrice, nous avons été amenés à introduire deux temps réels arbitraires  $t_I$  et  $t_F$  qui définissent le contour d'intégration  $\mathcal{C}$ . De par leur nature arbitraire, il est préférable de s'assurer que leur choix n'a aucune influence [18] sur les résultats du développement perturbatif<sup>26</sup>. A cet effet, nous allons utiliser les relations KMS vérifiées par les propagateurs libres. A ce stade, on peut noter que la symétrie KMS affecte seulement la variable temporelle. Elle est par conséquent vérifiée aussi bien avant qu'après avoir effectué la transformation de FOURIER pour les variables spatiales. Cela signifie que le détail de la façon dont on traite les variables spatiales ne joue aucun rôle pour

<sup>25</sup>On a évidemment  $\sum_{i=1}^n q_i = 0$  du fait de la conservation de la charge  $Q$ . C'est pourquoi dans le cas du propagateur, le facteur qui apparaît lorsqu'on considère la deuxième entrée est  $e^{-\beta \mu q}$ .

<sup>26</sup>De nombreux articles ont fait jouer à la limite  $t_I \rightarrow -\infty$  un rôle non trivial dans le but de justifier certaines manipulations. Le fait que la symétrie KMS implique l'indépendance du développement perturbatif vis à vis du temps initial  $t_I$  a été mis en évidence dans [18].

établir la propriété qui nous intéresse. Par conséquent, dans le but d'alléger les notations, nous n'écrirons que les variables temporelles des fonctions entrant en jeu.

Soit un diagramme  $G$  que l'on se propose de considérer dans le cadre du développement perturbatif, on peut écrire formellement

$$G(x_1^o, \dots, x_n^o) = \int_{\mathcal{C}} \left[ \prod_{i=1}^v dy_i^o \right] F(x_1^o, \dots, x_n^o | y_1^o, \dots, y_v^o), \quad (1.80)$$

où  $v$  est le nombre de vertex du diagramme, et où la fonction  $F$  est le produit de tous les propagateurs libres constituant ce diagramme. Indépendamment de la nature des champs circulant sur les lignes internes du diagramme, cette fonction  $F$  vérifie la propriété suivante :

$$\begin{aligned} \forall i \in [1, \dots, v], \quad & F(x_1^o, \dots, x_n^o | y_1^o, \dots, y_i^o = t_I, \dots, y_v^o) \\ &= F(x_1^o, \dots, x_n^o | y_1^o, \dots, y_i^o = t_I - i\beta, \dots, y_v^o). \end{aligned} \quad (1.81)$$

Notons d'emblée que cette propriété est triviale grâce à (1.71) si tous les propagateurs internes au diagramme transportent un champ scalaire réel. Si certains des propagateurs transportent une charge conservée, elle découle de la nullité de la somme des charges arrivant à un vertex, qui implique la compensation de tous les facteurs  $e^{\pm\beta\mu q_i}$ . Si des lignes fermioniques parcourent le diagramme, les règles de FEYNMAN imposent qu'il y en ait toujours un nombre pair à chaque vertex, ce qui entraîne la compensation des signes – de (1.73).

Afin de prouver maintenant que  $G$  ne dépend pas de  $t_I$ , remarquons que la seule dépendance en  $t_I$  est contenue dans les extrémités du contour d'intégration  $\mathcal{C}$ . Or, si l'on considère une quantité de la forme

$$A = \int_{\mathcal{C}} dx^o a(x^o), \quad (1.82)$$

on obtient

$$\frac{dA}{dt_I} = a(t_I - i\beta) - a(t_I), \quad (1.83)$$

pourvu que la fonction  $a(x^o)$  soit holomorphe dans un domaine connexe contenant les deux extrémités  $t_I$  et  $t_I - i\beta$ . En outre, si la fonction  $a(x^o)$  vérifie cette propriété, le résultat  $A$  de l'intégrale ne dépend pas du contour, mais seulement de ses extrémités. Dans le cas qui nous occupe, la fonction  $F$  possède des propriétés de régularité suffisantes pour le lemme précédent,<sup>27</sup> mais en outre elle prend les mêmes valeurs aux deux extrémités du chemin d'intégration.

<sup>27</sup>En fait, on a besoin ici d'une version un peu plus générale du lemme précédent, car à strictement parler la fonction  $F$  n'est pas holomorphe en général. En effet, ce résultat est encore vrai si la fonction  $a(x^o)$  peut se mettre sous la forme suivante :

$$a(x^o) \equiv \theta_c(x^o - y^o) a^+(x^o) + \theta_c(z^o - x^o) a^-(x^o), \quad (1.84)$$

où  $y^o$  et  $z^o$  sont deux éléments arbitraires de  $\mathcal{C}$ , et où les fonctions  $a^+(x^o)$  et  $a^-(x^o)$  sont

Par conséquent, on prouve sans peine par récurrence que le diagramme  $G$  ne dépend pas de  $t_I$ . En fait, on a même un peu plus que cela : le diagramme  $G$  est indépendant du chemin d'intégration suivi pour une très large classe de contours. En fait, de l'étude précédente, il ressort que les contours admissibles sont tous les chemins partant d'un temps  $t_I$  arbitraire situé sur l'axe réel et se terminant au temps complexe  $t_I - i\beta$ . Naturellement, ceci implique trivialement que  $G$  ne dépend pas de  $t_F$  si l'on considère des contours du type de celui qui est représenté sur la figure 1.2.

Dans cette section, je me suis pour l'instant contenté d'étudier les conséquences de KMS sur le résultat de l'intégration sur  $\mathcal{C}$ . Il en a résulté une liberté assez grande dans le choix du contour. Toutefois, les considérations faites ici ne garantissent pas que les intégrations ultérieures sur les variables spatiales du diagramme vont donner un résultat convergent pour tout choix du contour. En effet, outre les propriétés de l'intégration sur  $\mathcal{C}$ , le choix de  $\mathcal{C}$  détermine les valeurs admissibles pour les temps externes  $x_i^o$ , qui doivent se trouver sur  $\mathcal{C}$ . Or, on peut vérifier que l'intégration sur la tri-impulsion diverge exponentiellement si on peut trouver deux temps externes  $x_1^o$  et  $x_2^o$  tels que  $\theta_c(x_2^o - x_1^o) = 1$  et  $\text{Im}(x_2^o - x_1^o) > 0$ . En effet, le facteur  $\theta_c(x_2^o - x_1^o)$  est toujours accompagné de  $\exp(-i\omega_k(x_2^o - x_1^o))$  dans le propagateur libre. Par conséquent, si l'on veut éviter cette divergence exponentielle, il faut faire en sorte que  $\text{Im}(x_2^o - x_1^o) \leq 0$  si  $\theta_c(x_2^o - x_1^o) = 1$ , ce qui impose au contour  $\mathcal{C}$  d'avoir une partie imaginaire qui est une fonction décroissante (ou à la limite, constante) de l'abscisse curviligne<sup>28</sup>.

Pour finir, mentionnons également qu'on peut donner une interprétation physique assez simple de l'invariance vis à vis du temps  $t_I$  des fonctions de GREEN calculées perturbativement. En effet, on peut voir ce temps comme l'instant initial auquel le système est placé dans un état d'équilibre statistique. A partir de là, il va bien sûr rester dans cet état d'équilibre. Or, pour un système physique à l'équilibre thermodynamique, il n'y a aucun moyen de déterminer la date à laquelle il a été placé dans cet état, par définition même de l'équilibre. Par conséquent, des fonctions de GREEN qui dépendraient de  $t_I$  contrediraient cette observation simple.

## 1.6 Formalisme à temps imaginaire

Le formalisme à temps imaginaire [5] est en fait la désignation moderne du formalisme mis sur pied par MATSUBARA[25]. La raison pour laquelle il s'appelle ainsi est liée au fait qu'il a été originellement obtenu en choisissant un contour qui va en ligne droite de 0 à  $-i\beta$ . Ce qui a été dit dans la section précédente sur

---

holomorphes dans un ouvert contenant le contour. En effet, on prouve alors

$$\frac{dA}{dt_I} = a^+(t_I - i\beta) - a^-(t_I) = a(t_I - i\beta) - a(t_I), \quad (1.85)$$

la dernière égalité découlant des propriétés de la fonction  $\theta_c(\cdot)$ .

<sup>28</sup>On peut aussi se convaincre de cette nécessité en écrivant de façon formelle la trace du produit de deux champs comme une somme sur les valeurs propres de l'Hamiltonien [6]. Cette façon de voir le problème requiert cependant des hypothèses sur le spectre de l'Hamiltonien.

l'indépendance du résultat vis à vis d'une classe très large de contours suggère cependant que ce formalisme doit pouvoir être obtenu à partir de n'importe quel chemin d'intégration.

Jusque là, nous avons conservé la variable temporelle dans les propagateurs en évitant de lui faire subir une transformation de FOURIER, car le fait que le chemin d'intégration ne soit pas l'axe réel rend les choses quelque peu délicates à ce niveau. En effet, la raison pour laquelle la transformation de FOURIER rend les choses très simples dans le développement perturbatif d'une théorie des champs réside dans la propriété suivante :

$$\text{TF}(f * g) = \text{TF}(f)\text{TF}(g) . \quad (1.86)$$

En d'autres termes, la transformée de FOURIER du produit de convolution de deux fonctions est égal au produit ordinaire de leurs transformées de FOURIER. Les produits de convolution sont les opérations que l'on rencontre dans le développement perturbatif tant que l'on garde les coordonnées temporelles comme variables. Cependant, le produit de convolution auquel on est confronté en théorie des champs à température finie est d'un genre un peu particulier. Par exemple, si l'on joint bout à bout deux fonctions à deux points  $F(x_1^o, x_2^o)$  et  $G(x_1^o, x_2^o)$ , on va obtenir une autre fonction à deux points  $H(x_1^o, x_2^o)$  qui est donnée par l'intégrale suivante :

$$H(x_1^o, x_2^o) = \int_{\mathcal{C}} dy^o F(x_1^o, y^o) G(y^o, x_2^o) . \quad (1.87)$$

On voit donc que ceci ressemble à un produit de convolution<sup>29</sup> ordinaire, mis à part le fait que le domaine d'intégration est différent de la droite réelle. Le problème est qu'à priori, la formule (1.86) n'est valable que lorsqu'on utilise la définition usuelle du produit de convolution.

Supposons afin de simplifier les notations que nous ayons déjà effectué une transformation de FOURIER sur les variables spatiales que nous n'écrirons plus explicitement dans la suite de cette section. En remarquant que les relations KMS impliquent d'une certaine façon des propriétés de  $-i\beta$ -périodicité (ou anti-périodicité pour les fermions) des fonctions de GREEN thermiques, il semble assez naturel de s'orienter vers une représentation sous la forme d'une série de FOURIER plutôt que d'une intégrale de FOURIER. Cela conduit à considérer les fonctions suivantes [26], qui ne sont rien d'autre que les coefficients de la série de FOURIER :

$$\mathcal{G}(\Omega_1, \dots, \Omega_n) \equiv \int_{\mathcal{C}} \left[ \prod_{i=1}^n e^{-\Omega_i x_i^o} dx_i^o \right] G(x_1^o, \dots, x_n^o) . \quad (1.88)$$

Nous n'avons pas mis de facteur  $i$  dans les exponentielles afin d'avoir des  $\Omega_i$  réels malgré une période imaginaire. A ce stade, après la discussion de la section précédente, il est légitime de se demander si une telle définition ne va pas

---

<sup>29</sup>Cette opération sera étudiée en détail dans la section 2.5.

conduire à des coefficients de FOURIER qui dépendent du contour choisi. Si on exige que ces coefficients soient indépendants du contour  $\mathcal{C}$  qui intervient dans la définition (1.88), il faut que la fonction

$$F(x_1^o, \dots, x_n^o) \equiv \left[ \prod_{i=1}^n e^{-\Omega_i x_i^o} \right] G(x_1^o, \dots, x_n^o) \quad (1.89)$$

prenne les mêmes valeurs aux deux extrémités du contour. Compte tenu des relations KMS vérifiées par la fonction  $G$ , cela contraint les valeurs admissibles des fréquences  $\Omega_i$  de la façon suivante [18] :

$$\begin{aligned} \Omega_i &= \frac{2\pi n_i}{\beta} && \text{pour un champ scalaire réel,} \\ \Omega_i &= \frac{2\pi n_i}{\beta} - i\mu q_i && \text{pour un champ scalaire complexe,} \\ \Omega_i &= \frac{\pi(2n_i + 1)}{\beta} - i\mu q_i && \text{pour un champ fermionique,} \end{aligned}$$

avec  $n_i \in \mathbb{Z}$ . On constate que cette condition conduit aux modes de FOURIER que l'on aurait obtenus compte tenu des propriétés de périodicité satisfaites par les fonctions de Green thermiques. Dans ce contexte, ils sont connus sous le nom de modes de MATSUBARA. La transformation précédente s'inverse aisément pour redonner la fonction initiale :

$$G(x_1^o, \dots, x_n^o) = \left( \frac{i}{\beta} \right)^n \sum_{(n_1, \dots, n_n) \in \mathbb{Z}^n} \left[ \prod_{i=1}^n e^{\Omega_i x_i^o} \right] \mathcal{G}(\Omega_1, \dots, \Omega_n). \quad (1.91)$$

$\mathcal{G}_o(\Omega, \mathbf{k})$   
  
 $-i\lambda(2\pi)^3 \delta(\sum_i \mathbf{k}_i) \frac{\beta}{i} \delta_{\sum_i \Omega_i}$   
  
 $\frac{i}{\beta} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3}$

FIG. 1.5 — Règles de Feynman dans le formalisme à temps imaginaire.  $K_i$  désigne  $\Omega_i, \mathbf{k}_i$ .

Du fait de l'invariance par translation temporelle, les fonctions de Green sont en réalité fonction des seules différences  $x_i^o - x_j^o$ . Il en résulte que les coefficients



de FOURIER  $\mathcal{G}(\Omega_1, \dots, \Omega_n)$  ne diffère de zéro que lorsque  $\Omega_1 + \dots + \Omega_n = 0$ . Plus précisément, la fonction  $\mathcal{G}$  est proportionnelle à

$$\frac{\beta}{i} \delta_{\sum_i \Omega_i} , \quad (1.93)$$

où  $\delta_{\sum_i \Omega_i}$  désigne un symbole de KRONECKER qui vaut un si la somme des fréquences est nulle et zéro sinon. Cette propriété permet ainsi de ne conserver qu'une seule des deux variables  $\Omega_1, \Omega_2$  dans les fonctions à deux points.

Si l'on fait subir cette transformation aux propagateurs libres obtenus dans la section où ont été exposées les règles de FEYNMAN, on obtient dans tous les cas :

$$\mathcal{G}_o(\Omega, \mathbf{k}) = \frac{i}{(i\Omega)^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2} . \quad (1.94)$$

En d'autres termes, les différences entre les divers types de champs sont codées dans les valeurs admissibles pour les fréquences de MATSUBARA.

Une telle définition de la “transformée de FOURIER” rend la relation (1.86) compatible avec le produit de convolution propre à la théorie des champs à température finie, ce qui conduit pour ce formalisme à des règles de FEYNMAN très similaires à celles que l'on connaît à température nulle (voir la figure 1.5). La différence majeure réside dans le fait que l'intégrale sur l'énergie est remplacée par une somme discrète sur les fréquences de MATSUBARA.

## Chapitre 2

# Représentation spectrale des fonctions de Green

La multiplicité des règles provient souvent de l'ignorance du maître, et ce qu'on peut ramener à un seul précepte général est moins clair quand on le divise en un grand nombre de préceptes particuliers.

RENÉ DESCARTES

*Règles pour la direction de l'esprit*

**A**près avoir exposé les principes de base de la théorie des champs à température finie, je vais présenter dans ce chapitre un des résultats importants qu'on peut déduire des relations KMS. Il s'agit d'une représentation intégrale des fonctions de GREEN, connue dans ce contexte sous le nom de représentation spectrale, qui facilite l'étude des propriétés des fonctions de GREEN qui sont indépendantes du développement perturbatif qu'on peut en faire. Plus précisément, le but des représentations spectrales est d'écrire de façon générale les fonctions de GREEN thermiques sous une forme qui rende manifeste le fait qu'elles possèdent la symétrie KMS. Ensuite, toute propriété des fonctions de GREEN qui est une conséquence des relations KMS pourra être prouvée simplement en utilisant ces représentations spectrales. Cette représentation sera utilisée à plusieurs reprises par la suite pour en déduire des résultats généraux concernant surtout les fonctions à deux points.

Dans ce chapitre, nous allons donc exposer cet outil (voir par exemple [4, 6, 27, 28, 29]). J'en présenterai également deux applications intéressantes à mes yeux. L'une d'elles consiste à montrer que tous les prolongements analytiques du formalisme à temps imaginaire sont équivalents dans le cas scalaire si les énergies externes sont nulles. L'autre application présentée ici est l'étude des propriétés

de base du produit de convolution qui apparaît naturellement en théorie des champs à température finie, et dont la principale particularité est d'avoir pour support le contour  $\mathcal{C}$ .

## 2.1 Représentations spectrales

### 2.1.1 Expression en coordonnée $x^o$

Soit  $G(x_1^o, \dots, x_n^o)$  une fonction à  $n$  points (ici aussi, puisque les propriétés qui nous intéressent sont reliées à KMS, il n'y a pas lieu d'écrire explicitement les variables spatiales). On peut la décomposer en une somme de  $n!$  fonctions correspondant chacune à une manière distincte d'ordonner les temps :

$$G(x_1^o, \dots, x_n^o) \equiv \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \theta_c(x_{\sigma(1)}^o - x_{\sigma(2)}^o) \cdots \theta_c(x_{\sigma(n-1)}^o - x_{\sigma(n)}^o) \times G_\sigma(x_1^o, \dots, x_n^o). \quad (2.1)$$

Pour cette fonction, la relation KMS (équations (1.77), (1.78) et (1.79)) appliquée à la ligne  $n^o i$  se traduit par

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma(n)=i} \theta_c(x_{\sigma(1)}^o - x_{\sigma(2)}^o) \cdots \theta_c(x_{\sigma(n-2)}^o - x_{\sigma(n-1)}^o) G_\sigma(\cdots, x_i^o = t_I, \cdots) \\ &= \alpha_i \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma(1)=i} \theta_c(x_{\sigma(2)}^o - x_{\sigma(3)}^o) \cdots \theta_c(x_{\sigma(n-1)}^o - x_{\sigma(n)}^o) G_\sigma(\cdots, x_i^o = t_I - i\beta, \cdots), \end{aligned} \quad (2.2)$$

où  $\alpha_i$  dépend de la nature du champ associé au point  $n^o i$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \alpha_i &\equiv 1 && \text{pour un champ scalaire réel,} \\ \alpha_i &\equiv e^{\beta \mu q_i} && \text{pour un champ scalaire complexe,} \\ \alpha_i &\equiv -e^{\beta \mu q_i} && \text{pour un champ fermionique.} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ces coefficients  $\alpha_i$  sont tout ce qu'on a besoin de savoir sur la nature des champs externes pour obtenir la représentation spectrale de la fonction  $G$ . Si l'on introduit la permutation circulaire élémentaire suivante

$$\tau \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

la relation précédente devient

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma(n)=i} \theta_c(x_{\sigma(1)}^o - x_{\sigma(2)}^o) \cdots \theta_c(x_{\sigma(n-2)}^o - x_{\sigma(n-1)}^o) \left( G_\sigma(\cdots, x_i^o = t_I, \cdots) - \alpha_i G_{\sigma\tau^{-1}}(\cdots, x_i^o = t_I - i\beta, \cdots) \right) = 0. \quad (2.5)$$

Comme cette relation doit être satisfaite pour tous les temps rendant non nul le produit de fonctions  $\theta_c$ , les fonctions  $G_\sigma$  vérifient

$$\forall i, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma(n) = i, \quad G_\sigma(\cdots, x_i^o = t_I, \cdots) = \alpha_i G_{\sigma\tau^{-1}}(\cdots, x_i^o = t_I - i\beta, \cdots). \quad (2.6)$$

Exploitant également le fait que le temps  $t_I$  ne joue aucun rôle particulier, on peut remplacer dans la relation précédente  $t_I$  par un temps arbitraire  $x_i^o$ . Si on considère maintenant la transformée de FOURIER des fonctions  $G_\sigma$ , définie par

$$\tilde{G}_\sigma(E_1, \dots, E_n) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \prod_{i=1}^n dx_i^o e^{iE_i x_i^o} \right] G_\sigma(x_1^o, \dots, x_n^o), \quad (2.7)$$

les relations (2.6) deviennent

$$\forall i, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma(n) = i, \quad \tilde{G}_\sigma(\dots, E_i, \dots) = \alpha_i e^{-\beta E_i} \tilde{G}_{\sigma\tau^{-1}}(\dots, E_i, \dots) \quad (2.8)$$

qui implique que les  $\tilde{G}_\sigma$  ne sont pas indépendants si leurs  $\sigma$  peuvent être reliés en itérant la permutation circulaire  $\tau$ . Par conséquent, si on revient à la fonction initiale  $G$  en écrivant chaque  $G_\sigma$  comme la transformée de FOURIER inverse de  $\tilde{G}_\sigma$ , on peut limiter la somme sur  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  à une somme étendue à l'ensemble quotient  $\mathfrak{S}_n/\mathcal{R}$ , où  $\mathcal{R}$  est la relation d'équivalence définie par  $\sigma_1 \mathcal{R} \sigma_2 \Leftrightarrow \exists q | \sigma_2 = \sigma_1 \tau^q$ . Finalement, on peut écrire la fonction de GREEN  $G$  sous la forme :

$$\begin{aligned} G(x_1^o, \dots, x_n^o) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \prod_{i=1}^n \frac{dE_i}{2\pi} e^{-iE_i x_i^o} \right] 2\pi \delta\left(\sum_{i=1}^n E_i\right) \\ &\times \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n/\mathcal{R}} g_\sigma(E_1, \dots, E_n) \sum_{k=1}^n \left[ \prod_{i=1}^k \alpha_{\sigma(i)} e^{-\beta E_{\sigma(i)}} \right] \\ &\times \theta_c(x_{\sigma\tau^k(1)}^o - x_{\sigma\tau^k(2)}^o) \cdots \theta_c(x_{\sigma\tau^k(n-1)}^o - x_{\sigma\tau^k(n)}^o), \quad (2.9) \end{aligned}$$

où les fonctions  $g_\sigma$  sont simplement les fonctions  $\tilde{G}_\sigma$  desquelles on a factorisé la distribution de DIRAC qui traduit la conservation de l'énergie, *i.e.* l'invariance par translation dans le temps. Par abus de langage,  $\sigma$  désigne à la fois une classe d'équivalence et un représentant de cette classe. On peut toutefois se convaincre du fait que cette formule ne dépend pas du choix de ce représentant. En effet, changer de représentant de classe revient à changer la définition des fonctions  $g_\sigma$  tout en préservant la structure de cette formule. Cette relation est qualifiée de représentation spectrale de la fonction de GREEN  $G$ . Les fonctions  $g_\sigma$  sont appelées fonctions spectrales<sup>1</sup>. Pour représenter une fonction de GREEN à  $n$  points, il faut a priori  $\text{Card}(\mathfrak{S}_n/\mathcal{R}) = (n-1)!$  fonctions spectrales indépendantes. En particulier, il en faut une seule pour les fonctions à deux points et deux pour les fonctions à trois points. On peut également noter que chaque terme de la somme sur  $\sigma \in \mathfrak{S}_n/\mathcal{R}$  vérifie les relations KMS indépendamment.

---

<sup>1</sup> Telles qu'elles ont été définies ici, il s'agit des fonctions qui sont parfois nommées fonctions de WIGHTMAN dans la littérature. Notons aussi qu'elles dépendent des variables spatiales ( $\mathbf{x}_i$  ou  $\mathbf{k}_i$ ) de la fonction de GREEN considérée, qui n'ont pas été écrites ici.

## 2.1.2 Fonctions retardées généralisées

### Formalisme à temps imaginaire

Comme les calculs pratiques sont généralement effectués dans l'espace de FOURIER, on a rarement affaire aux fonctions considérées dans la section précédente, mais plutôt à leur transformée de FOURIER. Je vais donc donner maintenant la représentation spectrale des fonctions du formalisme à temps imaginaire, définies par la transformation (1.88). Le plus simple pour cela est de faire subir la transformation (1.88) à la représentation spectrale (2.9) obtenue plus haut. Comme la dépendance temporelle de (2.9) est contenue uniquement dans les fonctions  $\theta_c$  et dans des exponentielles, appliquer cette transformation est un exercice trivial qui donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\Omega_1, \dots, \Omega_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \prod_{i=1}^n \frac{dE_i}{2\pi} \right] 2\pi \delta\left(\sum_{i=1}^n E_i\right) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n / \mathcal{R}} g_\sigma(E_1, \dots, E_n) \\ &\times \sum_{k=1}^n \left[ \prod_{i=1}^k \alpha_{\sigma(i)} e^{-\beta E_{\sigma(i)}} \right] \frac{\beta}{i} \delta_{\Omega_1 + \dots + \Omega_n} \frac{i}{i\Omega_{\sigma\tau^k(1)} - E_{\sigma\tau^k(1)}} \dots \\ &\times \dots \frac{i}{i(\Omega_{\sigma\tau^k(1)} + \dots + \Omega_{\sigma\tau^k(n-1)}) - (E_{\sigma\tau^k(1)} + \dots + E_{\sigma\tau^k(n-1)})} . \end{aligned} \quad (2.10)$$

### Prolongement analytique

A partir de là, on peut obtenir par prolongement analytique une nouvelle famille de fonctions. L'idée de base est de substituer aux variables discrètes et imaginaires  $i\Omega_i$  des énergies réelles à valeurs continues. A cet effet, considérons les substitutions suivantes :

$$i\Omega_i \rightarrow k_i^o + i\epsilon_i \quad (2.11\text{-a})$$

$$\frac{\beta}{i} \delta_{\Omega_1 + \dots + \Omega_n} \rightarrow 2\pi \delta(k_1^o + \dots + k_n^o) , \quad (2.11\text{-b})$$

où les  $\epsilon_i$  sont des nombres réels infinitésimaux précisant par quel coté on approche l'axe réel dans ce prolongement. De même que les énergies, leur somme est nulle<sup>2</sup>  $\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n = 0$ . Les fonctions que l'on obtient par ce prolongement sont dénommées fonctions retardées généralisées car parmi elles se trouvent les fonctions de GREEN retardées et avancées usuelles. Leur représentation spectrale est obtenue de façon immédiate en insérant (2.11) dans (2.10). Dans la limite où

---

<sup>2</sup>Il faut cependant que toutes les sommes partielles de ces nombres  $\sum_{i \in I} \epsilon_i$ , où  $I$  est inclus strictement dans  $[1, \dots, n]$  et non vide, soient non nulles [29]. Le nombre des prolongements analytiques possibles n'est pas une fonction connue de  $n$ .

les  $\epsilon_i$  tendent vers zéro, on a la relation

$$\frac{i}{i\Omega_i - E_i} \rightarrow \frac{i\mathbb{P}}{k_i^o - E_i} + \pi\epsilon(\epsilon_i)\delta(k_i^o - E_i) , \quad (2.12)$$

où le symbole  $\mathbb{P}$  désigne la partie principale. Par conséquent, cela donne pour la représentation spectrale des fonctions retardées généralisées :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{\{\epsilon_i\}}(k_1^o, \dots, k_n^o) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \prod_{i=1}^n \frac{dE_i}{2\pi} \right] 2\pi\delta\left(\sum_{i=1}^n E_i\right) \\ &\times \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n / \mathcal{R}} g_\sigma(E_1, \dots, E_n) \sum_{k=1}^n \left[ \prod_{i=1}^k \alpha_{\sigma(i)} e^{-\beta E_{\sigma(i)}} \right] 2\pi\delta(k_1^o + \dots + k_n^o) \\ &\times \prod_{j=1}^{n-1} \left[ \frac{i\mathbb{P}}{K_{\sigma\tau^k}^j - E_{\sigma\tau^k}^j} + \pi\epsilon(\mathcal{E}_{\sigma\tau^k}^j)\delta(K_{\sigma\tau^k}^j - E_{\sigma\tau^k}^j) \right] , \end{aligned} \quad (2.13)$$

où l'on a utilisé les abréviations

$$K_{\sigma\tau^k}^j \equiv \sum_{l=1}^j k_{\sigma\tau^k(l)}^o , \quad E_{\sigma\tau^k}^j \equiv \sum_{l=1}^j E_{\sigma\tau^k(l)} , \quad \mathcal{E}_{\sigma\tau^k}^j \equiv \sum_{l=1}^j \epsilon_{\sigma\tau^k(l)} . \quad (2.14)$$

## 2.2 Décomposition sur une base de distributions

On peut développer le produit qui apparaît sur la dernière ligne de l'équation (2.13) sous la forme<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{n-1} \left[ \frac{i\mathbb{P}}{K_{\sigma\tau^k}^j - E_{\sigma\tau^k}^j} + \pi\epsilon(\mathcal{E}_{\sigma\tau^k}^j)\delta(K_{\sigma\tau^k}^j - E_{\sigma\tau^k}^j) \right] \pi\delta(K_{\sigma\tau^k}^n - E_{\sigma\tau^k}^n) \\ = \sum_{I \subset [1, \dots, n-1]} \left[ \prod_{i \in I} \epsilon(\mathcal{E}_{\sigma\tau^k}^i) \right] \mathbb{D}_{\sigma\tau^k}^I , \end{aligned} \quad (2.15)$$

avec

$$\mathbb{D}_{\sigma\tau^k}^I \equiv \left[ \prod_{j \in [1, \dots, n-1] \setminus I} \frac{i\mathbb{P}}{K_{\sigma\tau^k}^j - E_{\sigma\tau^k}^j} \right] \left[ \prod_{i \in I} \pi\delta(K_{\sigma\tau^k}^i - E_{\sigma\tau^k}^i) \right] \pi\delta(K_{\sigma\tau^k}^n - E_{\sigma\tau^k}^n) . \quad (2.16)$$

Comme on va le voir maintenant, l'usage de la formule (2.13) est rendu un peu compliqué par le fait que les distributions  $\mathbb{D}_{\sigma\tau^k}^I$  qui y apparaissent naturellement ne sont pas toutes distinctes. Je me propose donc de réécrire cette formule en la développant sur un ensemble de distributions linéairement indépendantes. Cette

---

<sup>3</sup>On associe ce produit à la distribution de DIRAC qui traduit la conservation de l'énergie totale, car cela rendra les choses plus symétriques par la suite.

technique a été utilisée pour étudier certaines propriétés des fonctions à quatre points par TAYLOR dans [30] et rendue plus systématique par EVANS dans [31]. Plus précisément, il s'agit de trouver tous les couples  $(k, I)$  donnant la même distribution  $\mathbb{D}_{\sigma\tau^k}^I$ , *i.e.* résoudre l'équation

$$\mathbb{D}_{\sigma\tau^k}^I = \mathbb{D}_{\sigma\tau^l}^J . \quad (2.17)$$

Afin d'identifier celles des distributions  $\mathbb{D}_{\sigma\tau^k}^I$  qui sont égales, il est plus simple de commencer par déterminer celles qui possèdent le même jeu de distributions de DIRAC. Il est a priori évident que l'on ne pourra identifier que des distributions comportant le même nombre de  $\delta$ , ce qui implique  $\text{card}(I) = \text{card}(J)$  que l'on va noter  $r$ . Le produit des distributions  $\delta$  contenues dans  $\mathbb{D}_{\sigma\tau^k}^I$  peut être réécrit de la manière suivante

$$\prod_{i \in I \cup \{n\}} \delta(K_{\sigma\tau^k}^i - E_{\sigma\tau^k}^i) = \prod_{i \in I \cup \{n\}} \delta\left(\sum_{a=1}^i (k_{\sigma(k+a)}^o - E_{\sigma(k+a)})\right) , \quad (2.18)$$

où l'on a utilisé  $\tau^k(a) = k+a$ , en sous-entendant que le résultat est réduit modulo  $n$  afin de rester dans l'intervalle  $[1, \dots, n]$ . A ce stade, on voit que les différentes

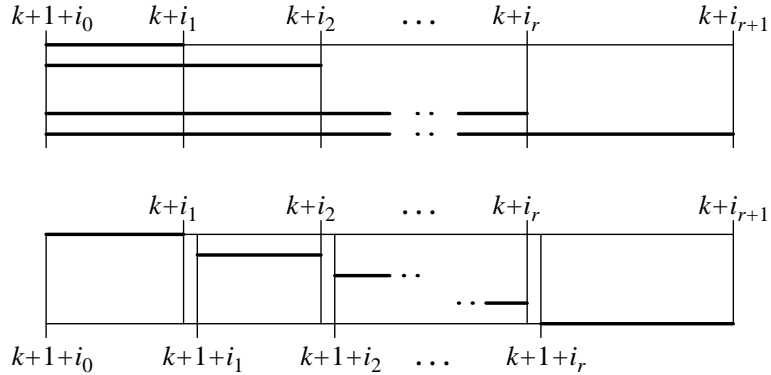


FIG. 2.1 – Illustration des manipulations effectuées sur les arguments des fonctions  $\delta$ . La figure du haut représente la structure des arguments des distributions de Dirac avant la manipulation (équation (2.18)) et la figure du bas montre la structure issue de cette transformation (équation (2.19)). Les traits épais représentent les intervalles pris par les indices des arguments. Chacun de ces traits correspond à une fonction  $\delta$ .

distributions  $\delta$  qui interviennent dans ce produit ont des arguments “emboîtés” les uns dans les autres. Par conséquent, si on utilise l’identité  $\delta(x)\delta(x+y) = \delta(x)\delta(y)$ , on pourra facilement le réécrire avec des fonctions  $\delta$  dont les arguments n’ont plus de partie commune. Pour cela, il est commode de donner un nom aux





$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=k+1+i_q}^n \left[ e^{\beta(k_{\sigma(i)}^o - E_{\sigma(i)})} \right] \\
&= \prod_{i=k+1}^n \left[ e^{\beta(k_{\sigma(i)}^o - E_{\sigma(i)})} \right] \prod_{i=k+1}^{k+i_q} \left[ e^{-\beta(k_{\sigma(i)}^o - E_{\sigma(i)})} \right]. \quad (2.21)
\end{aligned}$$

La disposition des fonctions  $\delta$  implique que le deuxième facteur de la dernière ligne est égal à 1. Par conséquent, la quantité considérée ici est un invariant de classe.

Considérons ensuite le produit des parties principales qui apparaît dans la définition de la distribution  $\mathbb{D}_{\sigma\tau^k}^I$ . Ce produit peut être simplifié en tenant compte des distributions de DIRAC qui sont contenues dans  $\mathbb{D}_{\sigma\tau^k}^I$ . Cette manipulation est illustrée graphiquement sur la figure 2.3. Cette transformation

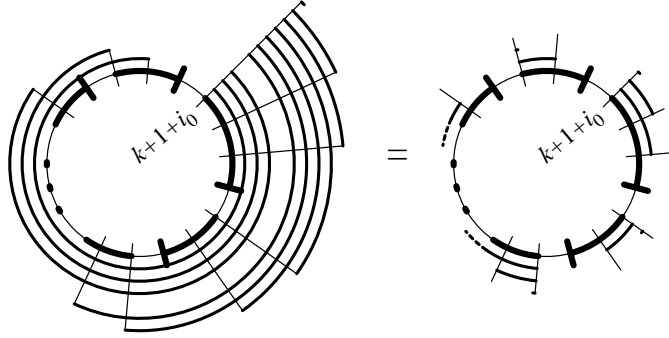


FIG. 2.3 – Illustration du fait que le produit des parties principales dans  $\mathbb{D}_{\sigma\tau^k}^I$  est un invariant de classe. Les traits radiaux en gras indiquent la position des indices  $k+i_a$ . Les autres rayons indiquent la position des indices  $k+p_a$ , où les  $p_a$  sont les éléments de  $[1, \dots, n-1] \setminus I$ . Les arcs en gras indiquent les indices portés par les arguments des fonctions  $\delta$ . Les arcs fins indiquent les indices portés par les dénominateurs des parties principales. L'égalité entre les deux expressions est obtenue en utilisant les fonctions  $\delta$ . L'expression représentée par la figure de droite est manifestement invariante sous une permutation circulaire de blocs.

effectuée, il est évident que ce produit de parties principales reste inchangé si l'on opère une permutation circulaire sur les blocs de la figure 2.3, ce qui est précisément ce qui se passe lorsqu'on parcourt la classe d'équivalence de  $(k, I)$ . Avec les résultats épars précédents, on montre que l'objet

$$\mathcal{D}_{\sigma}^{\chi} \equiv \mathbb{D}_{\sigma\tau^k}^I \left[ \prod_{i=1}^k e^{\beta(k_{\sigma(i)}^o - E_{\sigma(i)})} \right] \quad (2.22)$$

est un invariant propre à cette classe d'équivalence, ce qui justifie qu'on le note d'une façon qui ne fasse apparaître que la classe d'équivalence  $\chi$  à laquelle il correspond.

Compte tenu de ce qui précède, on peut réécrire la représentation spectrale des fonctions retardées généralisées sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{\{\epsilon_i\}}(k_1^o, \dots, k_n^o) &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \prod_{i=1}^n \frac{dE_i}{2\pi} \right] 2\pi \delta\left(\sum_{i=1}^n E_i\right) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n / \mathcal{R}} g_\sigma(E_1, \dots, E_n) \\ &\times \sum_{\chi} \mathcal{D}_\sigma^\chi \sum_{(k, I) \in \chi} \left[ \prod_{i=1}^k \alpha_{\sigma(i)} e^{-\beta k_{\sigma(i)}^o} \right] \left[ \prod_{i \in I} \epsilon(\mathcal{E}_{\sigma \tau^k}^i) \right]. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dans cette expression, chaque terme de la somme sur  $\sigma$  vérifie KMS individuellement, et a été projeté sur un jeu de distributions linéairement indépendantes.

## 2.3 Egalité des fonctions retardées scalaires à énergie nulle

À titre d'exemple d'application, je vais maintenant présenter un résultat du à EVANS [31] qui consiste à utiliser la représentation précédente pour étudier les fonctions retardées généralisées lorsque les énergies externes  $k_i^o$  sont nulles. Je commencerai par la situation la plus simple où tous les champs sont des champs scalaires réels, pour laquelle une propriété remarquable peut être prouvée : toutes les fonctions retardées généralisées sont égales si les énergies externes sont nulles. Cela revient à prouver que la somme<sup>5</sup>

$$\sum_{(k, I) \in \chi} \left[ \prod_{i \in I} \epsilon(\mathcal{E}_{\sigma \tau^k}^i) \right] \quad (2.24)$$

est indépendante du jeu des  $\epsilon_i$  que l'on considère. Compte tenu de l'équation (2.20) qui détaille la structure d'une classe d'équivalence à partir de la connaissance de l'un de ses représentants  $(k, I)$ , on peut écrire ici

$$\sum_{(k, I) \in \chi} \left[ \prod_{i \in I} \epsilon(\mathcal{E}_{\sigma \tau^k}^i) \right] = \sum_{q=0}^r \left[ \prod_{a=1}^r \epsilon(\mathbb{E}_\sigma^{q, q+a}) \right], \quad (2.25)$$

où je note  $\mathbb{E}_\sigma^{q, q+a} \equiv \mathcal{E}_{\sigma \tau^{k+i_q}}^{i_{q+a}-i_q} = \sum_{j=k+1+i_q}^{k+i_{q+a}} \epsilon_{\sigma(j)}$ . Cette quantité vérifie l'identité

$$\mathbb{E}_\sigma^{q, q'} + \mathbb{E}_\sigma^{q', a} = \mathbb{E}_\sigma^{q, a}. \quad (2.26)$$

---

<sup>5</sup>On voit ici l'intérêt que présente la transformation effectuée dans la section précédente. En effet, l'indépendance linéaire des distributions  $\mathcal{D}_\sigma^\chi$  permet de se restreindre d'emblée à l'étude de leur coefficient puisqu'aucune compensation ne peut être attendue de la somme sur les classes  $\chi$ .

Notons maintenant  $n_{\pm}(q)$  le nombre de signes<sup>6</sup>  $+$  (resp.  $-$ ) dans le produit indexé par  $a$ . Supposons pour fixer les idées que  $q \neq q'$  et que  $\mathbb{E}_{\sigma}^{q,q'}$  soit positif. Alors, on déduit de l'identité précédente les implications suivantes

$$\forall a \neq q, q', \quad \mathbb{E}_{\sigma}^{q',a} > 0 \Rightarrow \mathbb{E}_{\sigma}^{q,a} > 0 \quad (2.27\text{-a})$$

$$\forall a \neq q, q', \quad \mathbb{E}_{\sigma}^{q,a} < 0 \Rightarrow \mathbb{E}_{\sigma}^{q',a} < 0. \quad (2.27\text{-b})$$

Comme en outre  $\mathbb{E}_{\sigma}^{q,q'} > 0$  par hypothèse, on en déduit  $n_{-}(q) < n_{-}(q')$ . Des résultats de même nature auraient été obtenus en partant de l'hypothèse opposée. Dans tous les cas, on a  $q \neq q' \Rightarrow n_{-}(q) \neq n_{-}(q')$ . Par conséquent, la fonction  $n_{-}(q)$ , qui applique l'intervalle  $[0, \dots, r]$  dans lui même, est injective et donc bijective. On en déduit immédiatement que la somme de l'équation (2.25) peut s'écrire comme

$$\sum_{q=0}^r \left[ \prod_{a=1}^r \epsilon(\mathbb{E}_{\sigma}^{q,q+a}) \right] = \sum_{n_{-}=0}^r (-1)^{n_{-}} = \frac{1}{2}(1 + (-1)^r). \quad (2.28)$$

On constate donc que cette quantité dépend de  $r$  qui est le nombre de distributions  $\delta$  dans le terme considéré, mais pas du choix des paramètres  $\epsilon_i$  qui ont servi à définir le prolongement analytique. Cela prouve donc le résultat annoncé.

On peut maintenant se demander si ce résultat est généralisable à d'autres types de champs. L'examen de la formule (2.23) indique que dans le cas des champs scalaires complexes, on peut se ramener au cas précédent en se plaçant non pas au point d'énergie nulle, mais en  $k_i^o = \mu q_i$  pour chacun des points de la fonction qui correspond à un tel champ.

Par contre, si des fermions sont présents dans cette fonction de Green, la présence de signes  $-$  dans les  $\alpha_i$  correspondants implique qu'il faudrait se placer en un point d'énergie complexe pour se ramener au cas des champs scalaires réels, ce qui semble en limiter l'intérêt. Par ailleurs, la présence des mêmes signes  $-$  semble empêcher une généralisation directe des manipulations de l'équation (2.28).

## 2.4 Cas particulier des fonctions à deux points

Dans cette section, je vais donner dans le cas des fonctions à deux points une forme alternative à (2.9) qui présente l'avantage d'être plus simple à utiliser, et plus intuitive. Commençons donc par réécrire (2.9) pour une fonction à deux points, ce qui donne

$$G(x^o, y^o) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{iE(y^o - x^o)} g(E) \{ \alpha e^{-\beta E} \theta_c(y^o - x^o) + \theta_c(x^o - y^o) \}, \quad (2.29)$$

---

<sup>6</sup>Comme il y a  $r$  facteurs dans ce produit, ces deux fonctions sont bien évidemment reliées par  $n_{-}(q) = r - n_{+}(q)$ .

où  $\alpha$  est le facteur  $\alpha_i$  qui est associé au premier point. Si on sépare les contributions de  $E > 0$  et de  $E < 0$ , on obtient la forme plus parlante :

$$G(x^o, y^o) = \sum_{\epsilon=\pm} \int_0^{+\infty} dE g^\epsilon(E) G_{o,\epsilon}^E(x^o, y^o), \quad (2.30)$$

où je note

$$g^\epsilon(E) \equiv \frac{\epsilon}{2\pi} g(-\epsilon E) (\alpha e^{\epsilon\beta E} - 1) \quad (2.31-a)$$

$$G_{o,\epsilon}^E(x^o, y^o) \equiv e^{-i\epsilon E(y^o - x^o)} \left[ \theta_c(\epsilon(y^o - x^o)) + \frac{1}{\alpha^\epsilon e^{\beta E} - 1} \right]. \quad (2.31-b)$$

On peut aisément vérifier en regardant les formules (1.57), (1.65) et (1.70) que les objets  $G_{o,\epsilon}^E(x^o, y^o)$  contiennent toute la dépendance temporelle des propagateurs libres qui peuvent être écrits sous la forme

$$G_o(x^o, y^o; \mathbf{k}) = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \sum_{\epsilon=\pm} G_{o,\epsilon}^{\omega_{\mathbf{k}}}(x^o, y^o) \quad \text{avec} \quad \alpha = 1, \quad (2.32-a)$$

$$D_o(x^o, y^o; \mathbf{k}) = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \sum_{\epsilon=\pm} G_{o,\epsilon}^{\omega_{\mathbf{k}}}(x^o, y^o) \quad \text{avec} \quad \alpha = e^{\beta\mu q}, \quad (2.32-b)$$

$$S_o(x^o, y^o; \mathbf{k}) = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \sum_{\epsilon=\pm} [-\epsilon\omega_{\mathbf{k}}\gamma^o - \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma} + m] G_{o,\epsilon}^{\omega_{\mathbf{k}}}(x^o, y^o) \\ \text{avec} \quad \alpha = -e^{\beta\mu q}. \quad (2.32-c)$$

## 2.5 Propriétés de la convolution

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que le produit de convolution ordinaire est remplacé dans le développement perturbatif de la théorie des champs à température finie par un produit de convolution qui en diffère essentiellement par son support qui est maintenant le contour  $\mathcal{C}$ . Pour les distinguer, ce dernier sera qualifié de  $\mathcal{C}$ -convolution. Rappelons que la  $\mathcal{C}$ -convolution de deux fonctions à deux points  $F(x_1^o, x_2^o)$  et  $G(x_1^o, x_2^o)$  est donnée par

$$(F * G)(x_1^o, x_2^o) \equiv \int_{\mathcal{C}} dx^o F(x_1^o, x^o) G(x^o, x_2^o). \quad (2.33)$$

Il convient de noter tout d'abord que cette convolution ne possède une signification intrinsèque que lorsque  $F$  et  $G$  vérifient toutes deux la relation KMS<sup>7</sup>.

<sup>7</sup>Il faut en outre qu'elles soient de même nature, *i.e.* qu'elles correspondent à des champs de même spin et transportent la même charge. En pratique, s'écarter de ces contraintes n'a aucun sens, car une particule ne peut pas se transformer spontanément en quelque chose qui aurait des nombres quantiques différents.

En effet, d'après ce qui a été dit dans la section 1.5, telle est la condition pour que le résultat de l'équation (2.33) soit largement indépendant du contour  $\mathcal{C}$ , et en particulier du temps  $t_I$ . Comme les objets qui apparaissent en théorie des champs à température finie sont construits à partir des propagateurs libres qui possèdent cette symétrie, on aura toujours affaire par la suite à des fonctions  $F$  et  $G$  possédant cette propriété.

Comme on l'a vu dans ce chapitre, de telles fonctions  $F$  et  $G$  admettent une représentation spectrale qui permet de les écrire comme combinaison linéaire de propagateurs libres. On va mettre à profit cette particularité pour ramener l'étude des propriétés de la  $\mathcal{C}$ -convolution définie plus haut au cas particulier d'objets très simples. En effet, pour une telle fonction  $F$ , on peut écrire :

$$F(x_1^o, x_2^o) = \sum_{\epsilon=\pm} \int_0^{+\infty} dA f^\epsilon(A) G_{o,\epsilon}^A(x_1^o, x_2^o), \quad (2.34)$$

où  $f^\epsilon(E)$  est la fonction spectrale correspondante<sup>8</sup>. Les objets élémentaires  $G_{o,\epsilon}^E$  sont les objets les plus simples qui vérifient encore la symétrie KMS. Par conséquent, puisque la plupart des propriétés de la  $\mathcal{C}$ -convolution ne s'appuient que sur KMS, il suffira de les vérifier pour ces objets élémentaires.

Une intégration élémentaire donne immédiatement :

$$G_{o,\epsilon}^A * G_{o,\eta}^B = \frac{1}{i(\epsilon A - \eta B)} \left[ \epsilon G_{o,\eta}^B - \eta G_{o,\epsilon}^A \right]. \quad (2.35)$$

Pour effectuer rapidement ce calcul, on peut utiliser la formule suivante

$$\int_{\mathcal{C}} dx^o e^{-i\Sigma x^o} f(x^o) = \frac{1}{i\Sigma} \int_{\mathcal{C}} dx^o e^{-i\Sigma x^o} \frac{\partial f(x^o)}{\partial x^o}. \quad (2.36)$$

Cette formule est valable si la fonction  $e^{-i\Sigma x^o} f(x^o)$  prend les mêmes valeurs aux deux extrémités du contour  $\mathcal{C}$ . En effet, elle est obtenue par une intégration par parties, et cette condition assure de la disparition des termes de bord. On se trouve bien dans cette situation ici puisque les deux objets que l'on convolue vérifient KMS.

On constate que le résultat est indépendant du temps  $t_I$ , vérifie encore KMS, est continu lorsque  $\epsilon A - \eta B$  tend vers zéro<sup>9</sup>, et est inchangé si l'on permute les deux objets que l'on  $\mathcal{C}$ -convolue. Cette dernière propriété s'étend sans peine à des fonctions  $F$  et  $G$  plus générales (mais vérifiant cependant KMS) :

$$(F * G)(x_1^o, x_2^o) = (G * F)(x_1^o, x_2^o). \quad (2.37)$$

La  $\mathcal{C}$ -convolution est donc commutative.

<sup>8</sup>En pratique, la fonction à deux points  $F$  dépend également d'une tri-impulsion  $\mathbf{k}$ , dépendance qui se retrouve dans la fonction spectrale  $f^\epsilon$ . Toutefois, puisque cette dépendance n'est pas pertinente dans le problème qui nous intéresse, on l'omettra partout dans la suite dans le but d'alléger les notations.

<sup>9</sup>Pour vérifier cette propriété, on pourra avoir besoin de  $G_{o,-\epsilon}^{-E} = -G_{o,\epsilon}^E$ .

Un produit dérivé de la formule (2.35) est l'expression de la fonction spectrale du produit de convolution de deux fonctions. En effet, si on note  $P = F * G$ , et si on identifie

$$P(x_1^o, x_2^o) = \sum_{\mu=\pm} \int_0^{+\infty} dC p^\mu(C) G_{o,\mu}^C(x_1^o, x_2^o) \quad (2.38)$$

avec

$$(F * G)(x_1^o, x_2^o) = \sum_{\epsilon, \eta=\pm} \int_0^{+\infty} dA dB \frac{f^\epsilon(A) g^\eta(B)}{i(\epsilon A - \eta B)} \left[ \epsilon G_{o,\eta}^B(x_1^o, x_2^o) - \eta G_{o,\epsilon}^A(x_1^o, x_2^o) \right], \quad (2.39)$$

on obtient alors

$$p^\mu(C) = \sum_{\epsilon=\pm} \int_0^{+\infty} dA \frac{\epsilon \mathbb{P}}{i(\epsilon A - \mu C)} (f^\epsilon(A) g^\mu(C) + f^\mu(C) g^\epsilon(A)). \quad (2.40)$$

En itérant la formule (2.35), on obtient sans peine :

$$\begin{aligned} (G_{o,\epsilon}^A * G_{o,\eta}^B) * G_{o,\mu}^C &= \frac{\eta}{i(\epsilon A - \eta B)} \frac{\mu}{i(\epsilon A - \mu C)} G_{o,\epsilon}^A \\ &+ \frac{\epsilon}{i(\eta B - \epsilon A)} \frac{\mu}{i(\eta B - \mu C)} G_{o,\eta}^B \\ &+ \frac{\epsilon}{i(\mu C - \epsilon A)} \frac{\eta}{i(\mu C - \eta B)} G_{o,\mu}^C. \end{aligned} \quad (2.41)$$

La propriété remarquable de cette formule est d'être symétrique sous toute permutation des trois fonctions que l'on convole. Par conséquent, on prouve ensuite pour trois fonctions plus générales :

$$((F * G) * H)(x_1^o, x_2^o) = (F * (G * H))(x_1^o, x_2^o) \equiv (F * G * H)(x_1^o, x_2^o). \quad (2.42)$$

En d'autres termes, la  $\mathcal{C}$ -convolution est associative. La  $\mathcal{C}$ -convolution possède donc, tant qu'on se limite à des fonctions satisfaisant la symétrie KMS, les mêmes propriétés de base que la convolution ordinaire (*i.e.* avec l'axe réel pour chemin d'intégration).

Citons enfin une formule généralisant les formules (2.35) et (2.41), que l'on peut obtenir en itérant plusieurs fois la relation de base (2.35) :

$$G_{o,\epsilon_1}^{E_1} * \dots * G_{o,\epsilon_n}^{E_n} = \sum_{i=1}^n G_{o,\epsilon_i}^{E_i} \prod_{j \neq i} \frac{\epsilon_j}{i(\epsilon_j E_j - \epsilon_i E_i)}. \quad (2.43)$$

On peut également donner des formules très utiles pour le cas singulier où les énergies de tous les propagateurs que l'on convole sont égales. A partir de (2.35), on obtient

$$G_{o,\epsilon}^A * G_{o,\epsilon}^A = i \frac{\partial G_{o,\epsilon}^A}{\partial A}, \quad (2.44-a)$$

$$G_{o,\epsilon}^A * G_{o,-\epsilon}^A = \frac{1}{2iA} (G_{o,\epsilon}^A + G_{o,-\epsilon}^A). \quad (2.44-b)$$

Ceci n'est réellement utile que pour la convolution de plusieurs propagateurs libres, lors d'une sommation de DYSON par exemple. Par contre, pour convoluer deux fonctions arbitraires, il faut encore effectuer l'intégration sur les variables  $A$  et  $B$  qui interviennent dans les représentations spectrales des deux fonctions. Par conséquent, ce "point" singulier est une sous variété de mesure nulle dans cette intégration, et il ne nécessite donc pas un traitement particulier. En utilisant les relations élémentaires (2.44), on peut prouver pour les propagateurs correspondant aux divers types de champs introduits plus haut

$$G_o * G_o = i \frac{\partial G_o}{\partial m^2} , \quad (2.45-a)$$

$$D_o * D_o = i \frac{\partial D_o}{\partial m^2} , \quad (2.45-b)$$

$$S_o * S_o = i \frac{\partial S_o}{\partial m} . \quad (2.45-c)$$

Ces formules sont connues sous le nom de "formules de dérivation par rapport à la masse" [32]. Elles peuvent naturellement être itérées pour donner le produit de convolution de  $n + 1$  facteurs :

$$G_o * \cdots * G_o = \frac{1}{n!} \left[ i \frac{\partial}{\partial m^2} \right]^n G_o , \quad (2.46-a)$$

$$D_o * \cdots * D_o = \frac{1}{n!} \left[ i \frac{\partial}{\partial m^2} \right]^n D_o , \quad (2.46-b)$$

$$S_o * \cdots * S_o = \frac{1}{n!} \left[ i \frac{\partial}{\partial m} \right]^n S_o . \quad (2.46-c)$$

Comme la dérivation est linéaire, ces relations sont préservées par toute transformation linéaire des propagateurs qui ne fait pas intervenir la masse. C'est le cas en particulier de la transformation de FOURIER.

## Chapitre 3

# Formalismes à temps réel

—[...] ¿ Te basta con todo eso ?  
—No —respondió—. Esas pruebas no prueban nada.

JORGE LUIS BORGES  
*El libro de arena*

**L**es deux premiers chapitres étaient destinés d'une part à présenter les fondements de la théorie des champs à température finie et du développement perturbatif correspondant, et d'autre part à présenter quelques outils généraux permettant de déduire certaines propriétés importantes des fonctions de GREEN thermiques.

On a vu dans le premier chapitre que la forme du contour  $\mathcal{C}$  qui définit le produit de convolution était un obstacle pour arriver à une formulation des règles de FEYNMAN dans l'espace de FOURIER. Une première solution à ce problème est fournie par le formalisme dit à temps imaginaire. Toutefois, malgré des similitudes de structure avec les règles de FEYNMAN de la théorie des champs à température nulle, sa mise en oeuvre pratique est en fait très différente car la variable qui joue le rôle de l'énergie ne prend que des valeurs discrètes. Par ailleurs, le formalisme à temps imaginaire est un formalisme Euclidien, car ces énergies sont imaginaires. Par conséquent, des problèmes tels que celui des divergences colinéaires ne vont surgir qu'au moment du prolongement analytique qui permet de revenir à des énergies réelles. Pour cette raison, et aussi dans le but d'avoir un formalisme qui soit techniquement plus proche de la théorie des champs à température nulle, a été développé le formalisme dit à temps réel. Il s'agit d'un formalisme Minkowskien utilisant d'emblée une variable énergie réelle et continue.

Ce formalisme a été mis sur pied par SCHWINGER [33], BAKSHI, MAHANTHAPPA [34] et KELDysh [35], et peaufiné dans les années quatre-vingt dans le



contexte de la théorie des champs à température finie [36, 37, 38, 6]. Le but de ce chapitre est donc d'exposer ce formalisme, ainsi que quelques formulations alternatives qui en ont été données plus récemment. Une partie importante de ce chapitre sera dédiée à la discussion des fondements de ce formalisme. En particulier, un travail effectué au début de cette thèse [18] a consisté à discuter en détail les arguments qui sont usuellement donnés pour le justifier. Il est apparu que certains de ces arguments sont en contradiction avec les propriétés générales satisfaites par toutes les fonctions de GREEN thermiques. J'essaierai donc de proposer une autre justification qui ne soit pas en contradiction avec les principes de base de la théorie des champs à température finie. Je terminerai ce chapitre par quelques commentaires assez généraux sur les extensions de ce formalisme hors de l'équilibre thermodynamique.

### 3.1 Préliminaires

Le formalisme à temps réel est basé sur la remarque suivante : le contour  $\mathcal{C}$  représenté sur la figure 1.2 est constitué de deux branches  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  parallèles à l'axe réel, et d'une section  $\mathcal{C}_v$  parallèle à l'axe imaginaire. On a vu dans la section 1.5 qu'on pouvait légitimement changer les paramètres  $t_i$  et  $t_f$  sans modifier les résultats de l'approche perturbative. On peut donc en profiter pour choisir  $t_i = -\infty$  et  $t_f = +\infty$ , de telle sorte que les deux portions horizontales du contour sont confondues avec la droite réelle ( $\mathcal{C}_2$  étant orienté dans le sens opposé). Pour une fonction de GREEN  $G(x_1, \dots, x_n)$ , on peut alors définir les  $2^n$  transformées de FOURIER suivantes :

$$G^{\{a_i\}}(k_1, \dots, k_n) \equiv \left[ \prod_{i=1}^n \int_{\mathcal{C}_{a_i} \times \mathbb{R}^3} d^4 x_i e^{ik_i \cdot x_i} \right] G(x_1, \dots, x_n), \quad (3.1)$$

où les paramètres  $a_i$  prennent les valeurs 1 ou 2. Il s'agit maintenant d'obtenir les règles de FEYNMAN qui permettent d'obtenir directement ces fonctions de GREEN. En fait, on sait déjà que dans le secteur des variables spatiales, tout se passe comme à température nulle. Nous nous concentrerons donc essentiellement sur ce que devient dans ce formalisme la convolution sur le contour  $\mathcal{C}$ . Supposons pour commencer que la portion verticale du contour  $\mathcal{C}$  ne joue aucun rôle dans le développement perturbatif<sup>1</sup>. De façon évidente, si  $P(x_1, x_2)$  est le résultat

---

<sup>1</sup>Les discussions chroniques que l'on trouve dans la littérature pour justifier le formalisme à temps réel consistent presque toutes à affiner la manière de "prouver" cette hypothèse [39, 40, 41]. D'après la façon dont la portion  $\mathcal{C}_v$  du contour a été introduite dans la section 1.2.3 (*i.e.* comme permettant d'extraire la dépendance dans la constante de couplage qui est contenue dans l'opérateur densité), il est déjà à peu près clair que  $\mathcal{C}_v$  joue un rôle notoire et que cette hypothèse est fautive. Cela sera justifié par un contre-exemple dans les pages qui suivent, et on verra également comment on peut s'en passer. Pour l'instant, on peut voir cette supposition comme une simplification permettant de se faire une idée superficielle de ce formalisme.

d'une convolution effectuée sur le contour  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$

$$P(x_1, x_2) \equiv \int_{(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) \times \mathbb{R}^3} d^4x F(x_1, x) G(x, x_2) , \quad (3.2)$$

alors, on a la relation suivante entre les transformées de FOURIER<sup>2</sup>

$$P^{ij}(k) = F^{i1}(k) G^{1j}(k) - F^{i2}(k) G^{2j}(k) . \quad (3.3)$$

Dans cette relation, le signe  $-$  vient du sens de parcours de  $\mathcal{C}_2$ , qui est orienté dans le sens des temps décroissants, et chaque terme peut être identifié avec la contribution de l'une des sections de  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ . On peut voir cette formule comme une extension de la relation entre produit de convolution et transformation de FOURIER qui existe habituellement.

Avec la définition (3.1) de la transformation de FOURIER, on peut calculer les composantes de FOURIER des propagateurs libres. Si on utilise les relations (2.32), il suffit d'effectuer ce calcul pour les objets élémentaires  $G_{o,\epsilon}^{\omega_{\mathbf{k}}}(x^o, y^o)$ . Si l'on n'écrit pas la distribution  $\delta$  qui apparaît du fait de la conservation de l'énergie totale, et qu'on peut mettre en facteur, on obtient alors les quatre composantes

$$G_{o,\epsilon}^{11}(k^o, \mathbf{k}) = \theta(-\epsilon) \Delta_F(k^o + \epsilon \omega_{\mathbf{k}}) + \theta(\epsilon) \Delta_F^*(k^o + \epsilon \omega_{\mathbf{k}}) + \frac{1}{\alpha^\epsilon e^{\beta \omega_{\mathbf{k}}} - 1} 2\pi \delta(k^o + \epsilon \omega_{\mathbf{k}}) , \quad (3.4-a)$$

$$G_{o,\epsilon}^{22}(k^o, \mathbf{k}) = \theta(\epsilon) \Delta_F(k^o + \epsilon \omega_{\mathbf{k}}) + \theta(-\epsilon) \Delta_F^*(k^o + \epsilon \omega_{\mathbf{k}}) + \frac{1}{\alpha^\epsilon e^{\beta \omega_{\mathbf{k}}} - 1} 2\pi \delta(k^o + \epsilon \omega_{\mathbf{k}}) , \quad (3.4-b)$$

$$G_{o,\epsilon}^{12}(k^o, \mathbf{k}) = \left[ \theta(k^o) + \frac{1}{\alpha^\epsilon e^{\beta \omega_{\mathbf{k}}} - 1} \right] 2\pi \delta(k^o + \epsilon \omega_{\mathbf{k}}) , \quad (3.4-c)$$

$$G_{o,\epsilon}^{21}(k^o, \mathbf{k}) = \left[ \theta(-k^o) + \frac{1}{\alpha^\epsilon e^{\beta \omega_{\mathbf{k}}} - 1} \right] 2\pi \delta(k^o + \epsilon \omega_{\mathbf{k}}) , \quad (3.4-d)$$

où je note  $\Delta_F(x) \equiv i\mathbb{P}(1/x) + \pi\delta(x)$ .<sup>3</sup> Ces expressions permettent ensuite de construire très facilement les propagateurs correspondant à tous les types de champs considérés jusqu'ici. A titre d'illustration, et dans le but de discuter les différents termes qui apparaissent dans ces propagateurs, écrivons ceux qui correspondent à un champ scalaire réel (voir [37] pour les autres types de champs)

$$G_o^{11}(k^o, \mathbf{k}) = \Delta_F(k^2 - m^2) + 2\pi n_B(\omega_{\mathbf{k}}) \delta(k^2 - m^2) , \quad (3.5-a)$$

---

<sup>2</sup>Si on considère des fonctions  $F$  et  $G$  invariantes par translation temporelle, la transformée de FOURIER sera proportionnelle à  $2\pi\delta(k_1 + k_2)$ . Cette identité n'est valable qu'après avoir extrait ce facteur. Dans les facteurs restants, on peut ne garder qu'une seule impulsion qu'on appelle  $k$  pour simplifier.

<sup>3</sup>L'indice  $F$  est pour FEYNMAN.  $\Delta_F$  est en effet le propagateur de FEYNMAN habituel en théorie des champs à température nulle.

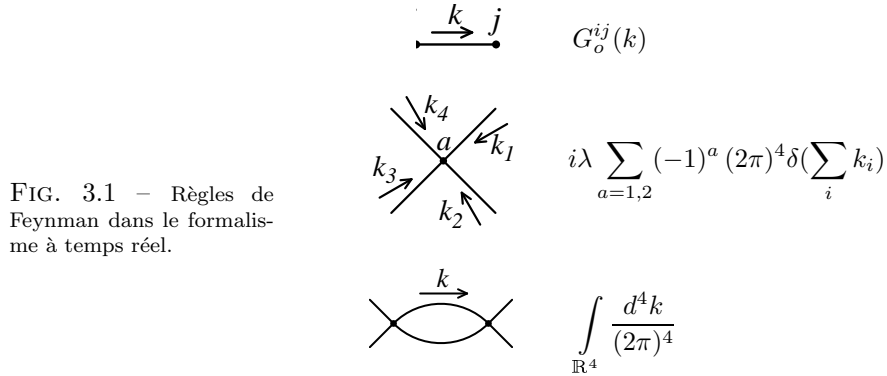
$$G_o^{22}(k^o, \mathbf{k}) = \Delta_F^*(k^2 - m^2) + 2\pi n_B(\omega_{\mathbf{k}}) \delta(k^2 - m^2), \quad (3.5-b)$$

$$G_o^{12}(k^o, \mathbf{k}) = 2\pi(\theta(-k^o) + n_B(\omega_{\mathbf{k}})) \delta(k^2 - m^2), \quad (3.5-c)$$

$$G_o^{21}(k^o, \mathbf{k}) = 2\pi(\theta(k^o) + n_B(\omega_{\mathbf{k}})) \delta(k^2 - m^2). \quad (3.5-d)$$

De par sa définition, le propagateur  $G_o^{11}$  est une généralisation directe du propagateur que l'on définit à température nulle dans l'espace de FOURIER. On constate que la version thermique de ce propagateur contient la contribution usuelle à température nulle, à laquelle on doit ajouter un terme proportionnel au poids statistique de BOSE-EINSTEIN.<sup>4</sup> On peut noter que toutes les contributions thermiques présentes dans ces propagateurs tendent vers zéro si l'on annule la température<sup>5</sup>. Un des aspects agréables de ce formalisme est qu'il sépare distinctement les corrections thermiques des contributions de température nulle.

Une fois que l'on a obtenu ces propagateurs, il est assez facile de donner les règles de FEYNMAN permettant de calculer perturbativement les fonctions  $G^{\{a_i\}}$  (en ayant toutefois à l'esprit que nous n'avons pas tenu compte pour l'instant de la partie verticale du contour). Ces règles de FEYNMAN sont résumées



sur la figure 3.1. On voit donc que la nouveauté essentielle par rapport à celles que l'on connaît à température nulle vient du doublement du nombre de degrés de liberté : tous les propagateurs sont remplacés par des matrices  $2 \times 2$ , et on

<sup>4</sup>Il est facile de comprendre physiquement pourquoi ces termes doivent être non nuls uniquement sur la couche de masse. En effet, les corrections thermiques à une amplitude viennent de la présence de particules *réelles* dans le bain thermique, avec une distribution donnée par le poids statistique correspondant. Ainsi, lorsqu'on calcule une boucle avec ces propagateurs thermiques, on a une contribution virtuelle (que l'on avait déjà à  $T = 0$ ) qui correspond aux fluctuations du vide, et une contribution des particules réelles présentes dans le plasma.

<sup>5</sup>Dans une section ultérieure, nous justifierons le fait que les indices 2 se découpent des indices 1 lorsque  $T \rightarrow 0$ , ce qui permet de retrouver dans cette limite les règles de FEYNMAN propres à la théorie des champs à température nulle.

somme sur toutes les façons d’attribuer un indice 1 ou 2 aux vertex internes du diagramme.

Ce qui précède était essentiellement destiné à donner les grandes lignes du formalisme à temps réel. Toutefois, comme cela a déjà été évoqué plus haut, l’hypothèse sur laquelle on a basé cette construction a peu de chances d’être vérifiée. La section qui suit est destinée à monter comment la contribution de la portion  $\mathcal{C}_v$  du contour est prise en compte dans ce formalisme. Indépendamment,<sup>6</sup> on constate également que les contributions thermiques à ces propagateurs sont proportionnelles à une distribution de DIRAC qui permet d’identifier  $\omega_{\mathbf{k}}$  et  $|k^o|$ . Il semble donc a priori que ces deux quantités soient interchangeable dans l’argument des poids statistiques. Toutefois, une étude plus détaillée montre qu’il n’en est rien, et que seul le choix qui consiste à écrire  $n_{B,F}(|k^o|)$  conduit à un développement perturbatif cohérent. Je montrerai plus loin que ceci est étroitement relié au problème de la partie verticale du contour.

Un autre problème qui survient avec ce formalisme et qui sera discuté plus loin dans ce chapitre est la possibilité d’engendrer dans le développement perturbatif des termes qui ne sont pas définis, même en tant que distributions. Il s’agit de produits de distributions du type de  $\Delta_F(\cdot)\Delta_F^*(\cdot)$ , auxquels on ne peut donner un sens<sup>7</sup> en termes de distributions<sup>8</sup>. Il faudra donc vérifier que ces termes pathologiques sont précédés d’un coefficient qui est identiquement nul. Comme nous le verrons, cette propriété est une conséquence de la symétrie KMS.

## 3.2 Du rôle de la partie verticale

### 3.2.1 Position du problème

Dans l’introduction au formalisme à temps réel que j’ai présentée dans la section précédente, je suis parti de l’hypothèse selon laquelle la portion  $\mathcal{C}_v$  du contour ne contribuait pas au développement perturbatif. C’est également l’approche “historique” qui a conduit à ce formalisme. La suite logique de cette histoire a été d’essayer de justifier cette hypothèse, mais aucun argument solide n’a été avancé à cet effet, ce qui fait que cette discussion s’est prolongée bien après les débuts du formalisme à temps réel (voir [39, 40, 42, 41] pour un panorama assez vaste des approches de cette question). La plupart de ces tentatives de justification faisaient jouer un rôle non trivial aux limites  $t_I \rightarrow -\infty, t_F \rightarrow +\infty$  alors que nous avons vu que les principes fondamentaux de la théorie des champs à température finie rendent le développement perturbatif totalement indépendant de ces paramètres. En 1989, NIEGAWA a suggéré dans l’article [42] que la section  $\mathcal{C}_v$  du contour pourrait contribuer, sans que cela pose un problème pour les

---

<sup>6</sup>Pour l’instant...

<sup>7</sup>Dans le développement perturbatif à température nulle seule la distribution  $\Delta_F(x)$  apparaît. Comme toutes les puissances de cette distribution sont définies, on n’est jamais confronté à un tel problème.

<sup>8</sup>On pourra trouver plus de détails sur les distributions mises en jeu ici et les relations qu’elles satisfont dans l’appendice A.

règles de FEYNMAN proposées plus haut. Il a en effet formulé l'idée selon laquelle la contribution de la partie verticale était prise en compte si l'on choisissait  $|k^o|$  comme argument des poids statistiques. Toutefois, sa justification présente un point faible notoire, qui est de supposer que les fonctions de GREEN dépendent de  $t_I$  et  $t_F$  et d'utiliser les limites précédentes. Je me propose ici de présenter un travail au sujet de ce problème paru dans [18], qui va dans le sens de NIEGAWA puisque je n'ai pas cherché à y montrer que la partie verticale du contour ne contribue pas, et qui en diffère essentiellement par ailleurs car je suis resté strictement conforme aux principes de base qui interdisent de faire jouer un rôle non trivial aux paramètres  $t_I$  et  $t_F$ . Ce travail avait commencé par montrer que les temps  $t_I$  et  $t_F$  ne jouent aucun rôle (cette justification a été reproduite dans le chapitre 1), ce qui permettait de savoir ce que l'on n'a pas le droit de faire sous peine de contredire quelque identité fondamentale. Ensuite, je montre comment cette contribution est prise en compte automatiquement dans le développement perturbatif.

### 3.2.2 Un exemple simple

Afin d'illustrer sur un exemple trivial les problèmes soulevés plus haut et leurs connexions, je vais considérer ici un exemple très simple [18], qui consiste à traiter perturbativement un terme de masse dans une théorie scalaire. Naturellement, on sait inclure un tel terme de masse de façon non perturbative, ce qui fait que le résultat est connu à l'avance. Ainsi, on pourra voir sans ambiguïté à quelles conditions le développement perturbatif donne le résultat correct. Considérons donc la somme des termes représentée sur la figure 3.2. Si

---

FIG. 3.2 – Traitement perturbatif d'un terme de masse.

$+$   $\overline{\text{---} \times \text{---}}$   
 $+$   $\overline{\text{---} \times \times \text{---}}$   
 $\vdots$

---

l'on utilise les règles de FEYNMAN établies dans la section précédente sans tenir compte de la section verticale du contour, le calcul perturbatif de l'effet de la masse  $\mu$  dans le propagateur se résume à l'évaluation de la somme suivante

$$G^{ij}(k^o, \mathbf{k}) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} (i\mu^2)^n \sum_{\{a_1, \dots, a_n=1,2\}} \left[ \prod_{i=1}^n (-1)^{a_i} \right] G_o^{ia_1}(k^o, \mathbf{k}) \cdots G_o^{a_n j}(k^o, \mathbf{k}) . \quad (3.7)$$

Afin de calculer facilement cette somme, il est utile de regrouper les quatre composantes du propagateur sous la forme d'une matrice  $2 \times 2$ . En outre, on peut vérifier pour le propagateur libre que cette matrice admet la factorisation<sup>9</sup> suivante [6]

$$G_o(k^o, \mathbf{k}) = U \begin{pmatrix} \Delta_F(k^2 - m^2) & 0 \\ 0 & \Delta_F^*(k^2 - m^2) \end{pmatrix} U, \quad (3.8)$$

où  $U$  est une matrice  $2 \times 2$  définie par<sup>10</sup>

$$U \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{1 + n_B} & \frac{\theta(-k^o) + n_B}{\sqrt{1 + n_B}} \\ \frac{\theta(k^o) + n_B}{\sqrt{1 + n_B}} & \sqrt{1 + n_B} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Il est alors trivial de vérifier que l'équation (3.7) peut se réécrire sous la forme matricielle suivante

$$G(k^o, \mathbf{k}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-i\mu^2)^n U G_o(k^o, \mathbf{k}) U (\tau_3 U G_o(k^o, \mathbf{k}) U)^n, \quad (3.10)$$

où  $\tau_3$  est la matrice de PAULI le long de l'axe  $z$ . Si on note ensuite que la matrice  $U$  vérifie la relation  $U\tau_3 U = \tau_3$ , on obtient sans peine

$$G(k^o, \mathbf{k}) = U \begin{pmatrix} \Delta_F(k^2 - m^2 - \mu^2) & 0 \\ 0 & \Delta_F^*(k^2 - m^2 - \mu^2) \end{pmatrix} U, \quad (3.11)$$

où les matrices  $U$  restent inchangées. Comme on sait traiter non perturbativement un tel terme de masse additionnel, on connaît par avance le résultat : il suffit de remplacer toute occurrence de  $m^2$  par  $m^2 + \mu^2$  dans le propagateur libre de la théorie. On voit dans (3.11) que c'est bien ce qui est arrivé à la matrice qui apparaît entre les deux facteurs  $U$ . Pour que cela soit vrai pour tous les facteurs, il faut que la masse  $m$  n'apparaisse pas dans les matrices  $U$  (car celles-ci sont in affectées par cette sommation). Cela n'est possible que si l'argument des poids statistiques contenus dans  $U$  est  $|k^o|$ .

La factorisation (3.8) permet de séparer distinctement deux aspects : les matrices  $U$  contiennent toute l'information relative à l'état statistique du système de champs considéré. La matrice qui apparaît au centre reflète quant à elle la dynamique de ces champs indépendamment de leur état statistique.

Ce que montre ce petit exemple, c'est que si l'on utilise les poids statistiques  $n_B(\omega_{\mathbf{k}})$ , la dépendance en  $\mu^2$  (qui joue ici le rôle de "constante de couplage") sera bien prise en compte dans la matrice centrale qui reflète la dynamique des champs, mais pas dans les matrices  $U$  qui reflètent leur état statistique. Ce faisant, nous sommes donc en train de perdre la contribution de la partie

<sup>9</sup>On peut vérifier que la possibilité d'une telle factorisation est liée à la symétrie KMS. On doit donc s'attendre à un propagateur exact qui soit également factorisable de la sorte.

<sup>10</sup>A ce stade, nous ne précisons pas si l'argument du poids statistique  $n_B$  est  $\omega_{\mathbf{k}}$  ou  $|k^o|$ . Nous verrons un peu plus tard que les deux choix ne conduisent pas au même résultat.

verticale du contour, qui permet comme on l'a vu dans le chapitre 1 d'extraire la dépendance en  $\mu^2$  qui est contenue dans l'opérateur densité.

Par contre, si l'on utilise les poids statistiques  $n_B(|k^o|)$ , ils deviendront automatiquement<sup>11</sup>  $n_B(\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2 + \mu^2})$  car ils sont en facteur de la distribution  $\delta(k^2 - m^2 - \mu^2)$  lorsqu'on développe le produit des trois matrices. Le changement que la masse  $\mu$  entraîne sur la dynamique des champs se répercute aussitôt sur leur statistique, ce qui signifie que la contribution de la partie verticale du contour est prise en compte correctement.

Par conséquent, cet exemple très simple permet déjà de comprendre l'essentiel : la contribution de la partie verticale du contour est prise en compte par une modification mineure des règles de FEYNMAN établies plus haut en ne tenant pas compte de cette partie verticale, à savoir il suffit d'utiliser  $|k^o|$  dans l'argument des poids statistiques. Ce résultat sera quelque peu généralisé dans les sections 3.2.3 et 3.2.4, mais il ne s'agira au fond que de modifications cosmétiques car les situations les plus générales peuvent se ramener à celle ci. En revanche, cet exemple n'explique pas pourquoi<sup>12</sup> on n'obtient pas le même résultat final avec  $n_B(\omega_{\mathbf{k}})$  et  $n_B(|k^o|)$  alors que le développement perturbatif est basé sur des objets élémentaires pour lesquels ce choix est indifférent. Je vais étudier ce point avec un peu plus de détails dans quelques pages.

### 3.2.3 Localisation de la contribution de la branche verticale

Pour établir dans quelles conditions on a une contribution de la partie verticale du contour, il suffit de noter que toute intégrale sur une variable temporelle associée à un vertex interne du diagramme se ramène à la forme suivante

$$I_{\mathcal{C}}(\Sigma) \equiv \int_{\mathcal{C}} dx^o e^{-i\Sigma x^o} f(x^o, \Sigma), \quad (3.12)$$

où le temps  $x^o$  n'entre dans la fonction  $f$  que via les fonctions  $\theta_c$  contenues dans les propagateurs libres (voir les équations (1.57), (1.65) et (1.70)). Dans cette définition, l'indice  $\mathcal{C}$  rappelle que ce résultat est obtenu par intégration sur le contour  $\mathcal{C}$  complet. Naturellement, la fonction  $f$  est telle que  $e^{-i\Sigma x^o} f(x^o, \Sigma)$  prenne des valeurs identiques aux deux extrémités du contour. Dans cette expression,  $\Sigma$  est une combinaison linéaire des  $\omega_{\mathbf{k}}$  des divers propagateurs du diagramme (internes ou externes). Les coefficients qui apparaissent dans cette combinaison linéaire peuvent être 0, 1 ou  $-1$  (*i.e.* chaque propagateur y apparaît au plus une fois).

---

<sup>11</sup>L'aspect automatique de cette procédure est encore une fois lié à KMS. En effet, cette symétrie est une conséquence du fait qu'à l'équilibre thermodynamique, l'état statistique des champs est contrôlé par l'Hamiltonien  $H$  qui gouverne aussi leur dynamique. Elle permet ainsi de retrouver l'argument correct des poids statistiques connaissant seulement la façon dont la constante de couplage affecte la dynamique des champs.

<sup>12</sup>Quelques particularités non triviales du produit des distributions sont à l'oeuvre dans cette sommation de DYSON. De ce point de vue, cet exemple est encore trop compliqué...

Lorsque  $\Sigma \neq 0$ , on peut intégrer par parties, pour obtenir

$$I_{\mathcal{C}}(\Sigma) = \frac{1}{i\Sigma} \int_{\mathcal{C}} dx^o e^{-i\Sigma x^o} \frac{\partial f(x^o, \Sigma)}{\partial x^o} . \quad (3.13)$$

Le fait que la seule dépendance en  $x^o$  contenue dans  $f$  vienne de fonctions  $\theta_c$  implique que la dérivée  $\partial f / \partial x^o$  est une combinaison linéaire de termes contenant chacun une fonction  $\delta_c$  qui rend l'intégration triviale. En effet, cela nous dit que le second membre de (3.13) est de la forme

$$I_{\mathcal{C}}(\Sigma) = \frac{1}{i\Sigma} \int_{\mathcal{C}} dx^o e^{-i\Sigma x^o} \sum_i c_i \delta_c(x^o - x_i^o) = \frac{1}{i\Sigma} \sum_i c_i e^{-i\Sigma x_i^o} , \quad (3.14)$$

où les  $c_i$  sont des coefficients contenant des poids statistiques et les  $x_i^o$  sont d'autres temps du diagramme, internes ou externes. De plus, le résultat ne dépend pas de la présence de la partie verticale  $\mathcal{C}_v$ . En effet, lorsqu'on restreint dans l'équation précédente le contour à  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ , le second membre est remplacé par

$$I_{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2}(\Sigma) = \frac{1}{i\Sigma} \sum_{\{i | x_i^o \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2\}} c_i e^{-i\Sigma x_i^o} , \quad (3.15)$$

où la somme est maintenant étendue aux seuls temps  $x_i^o$  qui sont encore sur la restriction  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$  du contour. Or, lorsqu'on ne tient pas compte de la partie verticale et si tous les temps externes sont réels, tous les autres temps  $x_i^o$  (aussi bien externes qu'internes) sont sur  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ , de sorte que l'on a

$$\sum_{\{i | x_i^o \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2\}} c_i e^{-i\Sigma x_i^o} = \sum_i c_i e^{-i\Sigma x_i^o} . \quad (3.16)$$

La fonction  $I_{\mathcal{C}}(\Sigma)$  aura donc exactement la même dépendance dans les autres temps du diagramme si on supprime  $\mathcal{C}_v$ . Par conséquent, lorsque  $\Sigma \neq 0$ , il n'y a pas dans  $I_{\mathcal{C}}(\Sigma)$  de contribution qui vienne spécifiquement de la partie verticale, ce que l'on peut résumer par :

$$\forall \Sigma \neq 0, \quad I_{\mathcal{C}}(\Sigma) = I_{\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2}(\Sigma) . \quad (3.17)$$

Dans le cas où  $\Sigma = 0$ , l'intégration par parties donne cette fois<sup>13</sup>

$$I_{\mathcal{C}}(\Sigma) = \frac{\beta}{i} f(t_I, 0) - \int_{\mathcal{C}} dx^o \frac{\partial f(x^o, 0)}{\partial x^o} . \quad (3.18)$$

De la même façon que précédemment, on prouve que l'intégrale qui apparaît dans le second membre ne contient pas de contribution spécifique à la portion verticale du contour. Par contre, le premier terme, proportionnel à  $-i\beta$ , est une contribution de la partie verticale. En effet, le calcul montre que ce facteur  $-i\beta$

---

<sup>13</sup>On peut cependant s'assurer de la continuité de  $I(\Sigma)$  en  $\Sigma = 0$ .



vient en fait de la différence  $(t_I - i\beta) - t_I$  entre les deux extrémités du contour. Par conséquent, si on supprimait la partie verticale, ce facteur deviendrait  $t_I - t_I = 0$ .

Par conséquent, la conclusion de cette discussion est qu'on a une contribution spécifique à la partie verticale  $\mathcal{C}_v$  chaque fois que  $\Sigma = 0$  dans une intégrale du type de (3.12). Par ailleurs, la condition  $\Sigma = 0$  est une contrainte portant sur les tri-impulsions (internes et externes) du diagramme. Le problème est maintenant de savoir si c'est une contrainte qui définit une sous-variété de mesure nulle, ou si elle n'apporte aucune restriction supplémentaire par rapport aux conditions déjà imposées par la conservation de l'impulsion. En effet, lorsque la restriction  $\Sigma = 0$  définit une sous-variété de mesure nulle, on n'aura plus aucune contribution de la partie verticale une fois qu'on aura effectué les intégrations sur les tri-impulsions en vertu de la continuité des intégrales du type de  $I_{\mathcal{C}}(\Sigma)$  au point  $\Sigma = 0$ .

Il est ensuite assez facile de voir qu'il n'existe que deux situations pour lesquelles la contrainte  $\Sigma = 0$  n'apporte aucune contrainte supplémentaire sur les tri-impulsions. La première concerne le cas où on insère une self-énergie entre deux propagateurs libres<sup>14</sup> qui portent les tri-impulsions  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$  respectivement. Pour certains termes, la condition  $\Sigma = 0$  va devenir ici  $\omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2} = 0$ . Comme la conservation de l'impulsion implique  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$ , cette contrainte est toujours satisfaite. Dans cette situation, on aura une contribution de la partie verticale à la fin du calcul.

La deuxième situation importante où l'on rencontre automatiquement la condition  $\Sigma = 0$  indépendamment de la valeur des tri-impulsions concerne le calcul des diagrammes du vide, *i.e.* sans lignes externes. En effet, dans ce cas, l'intégration sur le temps du dernier vertex considéré se fait toujours avec  $\Sigma = 0$ . Ces diagrammes un peu particuliers seront étudiés dans une section ultérieure.

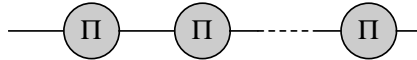
### 3.2.4 Traitement des insertions de self-énergie

Dans ce paragraphe, je vais maintenant étudier l'unique situation où une contribution de la partie verticale peut intervenir, et montrer que cette contribution est prise en compte naturellement par l'usage de  $n_B(|k^o|)$  au lieu de  $n_B(\omega_{\mathbf{k}})$ . Cette justification va faire appel à quelques propriétés de la  $\mathcal{C}$ -convolution établies dans la section 2.5. Considérons le diagramme qui correspond à l'in-

---

FIG. 3.3 – Diagramme générique engendrant une contribution de  $\mathcal{C}_v$ .

---



sertion de  $n$  self-énergies entre  $n + 1$  propagateurs libres, représenté sur la figure

---

<sup>14</sup>Et plus généralement lorsqu'on fait une sommation de DYSON de cette self-énergie. Le propagateur sur lequel on fait cette sommation peut bien sûr n'être qu'un élément d'un diagramme plus compliqué.

3.3. Tant que l'on garde les coordonnées temporelles, ce diagramme s'écrit

$$G(x_1^o, x_2^o) \equiv (G_o * \Pi * G_o * \cdots * \Pi * G_o)(x_1^o, x_2^o) , \quad (3.19)$$

avec  $n$  facteurs  $\Pi$ . Si on utilise la commutativité de la  $\mathcal{C}$ -convolution, on peut regrouper tous les propagateurs libres. Ensuite, si on utilise la formule de dérivation par rapport à la masse, on obtient

$$G = G_o * \cdots * G_o * \Pi * \cdots * \Pi = \frac{1}{n!} \left[ \left( i \frac{\partial}{\partial m^2} \right)^n G_o \right] * \Pi * \cdots * \Pi . \quad (3.20)$$

Notons tout d'abord que la convolution des  $n$  facteurs  $\Pi$  ne génère en général pas de contribution de la partie verticale.<sup>15</sup> En effet, si l'on écrit chaque  $\Pi$  au moyen de sa représentation spectrale, *i.e.* une intégrale de propagateurs libres pondérés par une fonction spectrale, la condition de contribution de la partie verticale sélectionne une sous-variété de mesure nulle dans cette intégrale, car les variables d'intégration qui interviennent dans la représentation spectrale de chaque  $\Pi$  sont indépendantes les unes des autres<sup>16</sup>.

Si l'on veut maintenant calculer la fonction  $G$  dans le formalisme à temps réel, sa composante  $ij$  est donnée par

$$G^{ij} = \frac{1}{n!} \sum_{\{a_i=1,2\}} \left[ \left( i \frac{\partial}{\partial m^2} \right)^n G_o^{ia_1} \right] * \Pi^{a_1 a_2} * \cdots * \Pi^{a_n j} . \quad (3.21)$$

Compte tenu de ce qui a été dit plus haut, le passage à la transformée de FOURIER ne pose aucun problème particulier en relation avec la partie verticale pour le produit des  $n$  facteurs  $\Pi$ , et peut être réalisé en itérant la formule (3.3) dont on a prouvé la validité lorsqu'aucune contribution spécifique ne vient de la partie verticale. La seule chose à regarder de près est le produit des  $n+1$  propagateurs libres, réécrit comme la dérivée  $n^{\text{ème}}$  du propagateur libre par rapport au carré de la masse. C'est en fait un calcul qui a déjà été fait implicitement lors de la sommation de Dyson d'un terme de masse présentée plus haut, mais nous allons ici l'aborder un peu différemment.

Commençons par le lemme suivant :

$$\frac{\partial}{\partial x} [f(x)\delta(x-a)] = f(a) \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-a) . \quad (3.22)$$

On peut noter sur cette formule la propriété suivante : bien que  $f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$ , on ne peut plus remplacer  $f(a)$  par  $f(x)$  dans le membre de droite. Si l'on applique cette formule au terme  $n_B(\sqrt{(m^2 + \mathbf{k}^2)})\delta(k_o^2 - \mathbf{k}^2 - m^2)$  contenant

<sup>15</sup>A condition toutefois de supposer que  $\Pi$  est irréductible à une particule.

<sup>16</sup>Ici, je triche un peu. En effet, cet argument n'est valide que si les fonctions spectrales ne sont pas singulières sur cette sous-variété. Ce sera le cas si la self-énergie que l'on somme contient une partie imaginaire. Ainsi, sa fonction spectrale sera une fonction régulière plutôt qu'une distribution de DIRAC. Dans le cas contraire, il faut faire subir aux  $n$  facteurs  $\Pi$  le même traitement qu'aux  $n+1$  facteurs  $G_o$ . Cela n'affecte pas la conclusion.

le poids statistique dans le propagateur libre  $G_o^{ia1}$ , avec  $x = m^2$  et  $a = k_o^2 - \mathbf{k}^2$ , on obtient

$$\left[ \frac{i\partial}{\partial m^2} \right]^n [n_B(\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2})\delta(k_o^2 - \mathbf{k}^2 - m^2)] = n_B(\sqrt{k_o^2}) \left[ \frac{i\partial}{\partial m^2} \right]^n \delta(k_o^2 - \mathbf{k}^2 - m^2). \quad (3.23)$$

On voit donc que c'est  $n_B(|k^o|)$  qui apparaît naturellement à l'issue de cette opération, et on ne peut plus remplacer  $n_B(|k^o|)$  par  $n_B(\omega_{\mathbf{k}})$  dans le membre de droite.

Faisons le point : la situation étudiée ici est la situation la plus générale où la contribution de la partie verticale joue un rôle, si l'on excepte les diagrammes du vide qui seront considérés plus loin. La formule de dérivation par rapport à la masse inclut cette contribution par construction, puisqu'elle a été établie dans le contexte de la  $\mathcal{C}$ -convolution. Comme la transformation de FOURIER qui fait passer au formalisme à temps réel n'implique pas la masse, cette formule reste vraie dans le formalisme à temps réel. Et là, on voit qu'elle entraîne naturellement la nécessité d'utiliser  $|k^o|$  comme argument des poids statistiques. Ceci achève donc de justifier les règles de FEYNMAN du formalisme à temps réel.

Je vais juste conclure cette section par deux remarques. La justification des règles de FEYNMAN du formalisme à temps réel que j'avais donnée dans [18] était techniquement un peu différente. En gros, j'y prouvais que la contribution de la partie verticale correspondait précisément à la différence entre les résultats donnés par les deux choix  $n_B(|k^o|)$  et  $n_B(\omega_{\mathbf{k}})$ . Cette façon de faire, même si elle est strictement équivalente à ce que j'ai présenté ici, nécessitait que l'on connaisse le résultat à l'avance (ceci dit, il l'était), ce qui la rendait assez peu élégante. Ici, au contraire, le fait que le résultat correct est donné par  $n_B(|k^o|)$  arrive automatiquement.

L'autre remarque est une mention d'un travail effectué par LE BELLAC et MABILAT en 1995-1996. Dans les articles [43, 44], ils ont proposé une nouvelle méthode pour justifier les règles de FEYNMAN du formalisme à temps réel. Ici encore, l'accent était mis sur le problème de la partie verticale. Sommairement, au lieu de travailler avec des distributions, ils ont préféré travailler avec des propagateurs libres régularisés. A cet effet, ils ont repris un travail antérieur d'EVANS et PEARSON [41] en lui apportant une amélioration essentielle : la régularisation qu'ils ont choisie pour le propagateur libre ne brise pas la symétrie KMS, par construction. Ce problème était jusqu'à présent l'obstruction majeure à une justification correcte de ces règles de FEYNMAN, qui n'offrait que l'alternative suivante : travailler sans régularisation comme je l'ai fait, ou trouver une régularisation<sup>17</sup> qui préserve les symétries de base de la théorie.

---

<sup>17</sup>Comme on le voit dans l'annexe A, régulariser les distributions ne résout pas les problèmes et ambiguïtés reliés à leur multiplication. La régularisation sert seulement à "sécuriser" les calculs intermédiaires dans les situations où on peut donner un sens à la multiplication.

### 3.3 Compensation des pathologies

#### 3.3.1 Identités KMS dans le formalisme à temps réel

Commençons par traduire les relations KMS dans le contexte du formalisme à temps réel. Partant de la relation (2.9), il est aisé d'obtenir la représentation spectrale des fonctions de GREEN du formalisme à temps réel :

$$G^{\{a_i\}}(k_1, \dots, k_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \prod_{i=1}^n \frac{dE_i}{2\pi} \right] 2\pi \delta\left(\sum_{i=1}^n E_i\right) \\ \times \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n / \mathcal{R}} g_\sigma(E_1, \dots, E_n) \sum_{k=1}^n \left[ \prod_{i=1}^k \alpha_{\sigma(i)} e^{-\beta E_{\sigma(i)}} \right] I_{\sigma \tau^k}^{\{a_i\}}, \quad (3.24)$$

où on note

$$I_{\sigma}^{\{a_i\}} \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } \exists i < j / a_{\sigma(i)} = 1, a_{\sigma(j)} = 2 \\ \Delta_F(\Sigma_{\sigma(r)}) \dots \Delta_F(\Sigma_{\sigma(r)} + \dots + \Sigma_{\sigma(2)}) 2\pi \delta(\Sigma_{\sigma(r)} + \dots + \Sigma_{\sigma(1)}) \\ \times \Delta_F(\Sigma_{\sigma(r+1)}) \dots \Delta_F(\Sigma_{\sigma(r+1)} + \dots + \Sigma_{\sigma(n-1)}) 2\pi \delta(\Sigma_{\sigma(r+1)} + \dots + \Sigma_{\sigma(n)}) \end{cases} \quad (3.25)$$

avec  $\Sigma_i \equiv k_i^o - E_i$  et  $r$  le nombre de  $a_i$  égaux à 2. Il est ensuite assez facile de vérifier que ces objets vérifient les identités suivantes

$$\sum_{\{a_i=1,2\}} \left[ \prod_{\{i|a_i=2\}} (-1) \right] I_{\sigma \tau^k}^{\{a_i\}} = 0 \quad (3.26-a)$$

$$\sum_{\{a_i=1,2\}} \left[ \prod_{\{i|a_i=2\}} -\alpha_i^{-1} e^{-\beta k_i^o} \right] \sum_{k=1}^n \left[ \prod_{i=1}^k \alpha_{\sigma(i)} e^{-\beta E_{\sigma(i)}} \right] I_{\sigma \tau^k}^{\{a_i\}} = 0 \quad (3.26-b)$$

De là, on déduit trivialement

$$\sum_{\{a_i=1,2\}} \left[ \prod_{\{i|a_i=2\}} (-1) \right] G^{\{a_i\}}(k_1, \dots, k_n) = 0, \quad (3.27-a)$$

$$\sum_{\{a_i=1,2\}} \left[ \prod_{\{i|a_i=2\}} -\alpha_i^{-1} e^{-\beta k_i^o} \right] G^{\{a_i\}}(k_1, \dots, k_n) = 0. \quad (3.27-b)$$

La première de ces identités est une relation qui est vérifiée par tous les types de fonctions de GREEN dans le formalisme à temps réel. Comme elle fait appel uniquement à l'identité (3.26-a) qui ne mélange pas les différentes valeurs de l'indice  $k$ , elle n'a en fait aucun rapport avec KMS. C'est donc la seconde de ces identités qui est la traduction de la symétrie KMS dans le formalisme à temps réel.

### 3.3.2 Compensation des pathologies

Des produits de distributions auxquels il est impossible de donner un sens peuvent apparaître lorsqu'on insère une fonction de vertex  $\Gamma$  à  $n$  points entre  $n$  propagateurs libres. Les conditions d'apparition de ces pathologies sont étudiées en détail dans l'annexe A consacrée à quelques éléments de théorie des distributions. Cette condition est que s'annule une combinaison linéaire des  $\omega_{\mathbf{k}_i}$  avec des coefficients tous égaux à  $\pm 1$ . Une telle condition réduit d'une unité la dimension de la variété accessible aux tri impulsions, excepté pour le cas  $n = 2$  puisque la conservation de l'impulsion implique automatiquement la nullité d'une telle combinaison linéaire.

L'objet auquel on s'intéresse est

$$\sum_{\{a_i=1,2\}} \left[ \prod_{i=1}^n G_o^{b_i a_i}(k_i) \right] \Gamma^{\{a_i\}}(k_1, \dots, k_n), \quad (3.28)$$

qui apparaît si une fonction de vertex  $\Gamma$  est insérée entre  $n$  propagateurs libres. Si l'on se rappelle les relations (2.32), (3.4), il est évident que tous les propagateurs libres peuvent se mettre sous la forme générique

$$G_o^{ij}(k) = \sum_{\eta, \mu=\pm} C_{\eta\mu}^{ij} \Delta_F(\eta(k^o + \mu\omega_{\mathbf{k}})), \quad (3.29)$$

où les coefficients  $C_{\eta\mu}^{ij}$  dépendent du type de champ considéré. Il est trivial de les extraire de (2.32). La discussion de l'appendice A indique que les termes pathologiques sont obtenus lorsque tous les  $\eta_i$  sont de même signe. La compensation totale des pathologies se résume donc aux deux conditions suivantes

$$\sum_{\{a_i=1,2\}} \left[ \prod_{i=1}^n C_{+\mu_i}^{b_i a_i} \right] \Gamma^{\{a_i\}}(k_1, \dots, k_n) = 0, \quad (3.30\text{-a})$$

$$\sum_{\{a_i=1,2\}} \left[ \prod_{i=1}^n C_{-\mu_i}^{b_i a_i} \right] \Gamma^{\{a_i\}}(k_1, \dots, k_n) = 0. \quad (3.30\text{-b})$$

Il est ensuite fastidieux, mais sans difficulté, de vérifier pour chaque type de champ que ces deux conditions sont des conséquences des identités<sup>18</sup> (3.27).

### 3.3.3 Origine de la différence entre les deux choix

Les considérations précédentes ont montré une différence entre l'usage de  $n_B(\omega_{\mathbf{k}})$  et de  $n_B(|k^o|)$ . Toutefois, cette lecture laisse la désagréable impression d'être victime d'une escroquerie. Ce paragraphe a pour but de la dissiper en

---

<sup>18</sup>Dans cette vérification, il faut avoir à l'esprit que la définition de la fonction de vertex  $\Gamma$  telle qu'elle apparaît dans (3.28) inclut un signe  $-$  pour chaque point de type 2. Par conséquent, les  $\Gamma^{\{a_i\}}$  satisfont des identités qui diffèrent par ces mêmes signes des identités (3.27) satisfaites par les fonctions de GREEN complètes  $G^{\{a_i\}}$ .

considérant un exemple encore plus simple dans lequel on peut suivre pas à pas ce qui se passe. Au lieu d'effectuer la sommation d'une série de DYSON comme dans l'exemple utilisé plus haut, considérons juste la convolution de deux propagateurs libres. La composante 11 de cet objet est  $G_o^{11}(k)G_o^{11}(k) - G_o^{12}(k)G_o^{21}(k)$ . En utilisant l'expression des propagateurs libres, on voit aisément que les termes en  $\Delta_F \Delta_F^*$ , qui ne sont pas définis (voir l'appendice A), se compensent. Il reste seulement :

$$G_o^{11}(k)G_o^{11}(k) - G_o^{12}(k)G_o^{21}(k) = (1 + n_B)[\Delta_F(k^2 - m^2)]^2 - n_B[\Delta_F^*(k^2 - m^2)]^2 . \quad (3.31)$$

On voit alors que le poids statistique  $n_B$  est en facteur de la distribution

$$[\Delta_F]^2 - [\Delta_F^*]^2 = 4i\pi\delta(k^2 - m^2)\mathbb{P}/(k^2 - m^2) = -2i\pi\delta'(k^2 - m^2) . \quad (3.32)$$

Si l'on regarde l'action de la distribution  $f(x)\delta'(x)$  sur la fonction test  $\phi(x)$ , on obtient

$$\langle f\delta', \phi \rangle = \langle \delta', f\phi \rangle = - \langle \delta, (f\phi)' \rangle , \quad (3.33)$$

et on voit que l'on a l'égalité  $f\delta' = f(0)\delta' - f'(0)\delta$ . Dans le cas qui nous intéresse, c'est le poids statistique qui joue le rôle de  $f$  et  $k_o^2$  est la variable par rapport à laquelle on dérive. Par conséquent, suivant que l'on a  $n_B(\omega_{\mathbf{k}})$  ou  $n_B(|k^o|)$ , le terme en  $f'(0)$  est nul ou pas. On voit donc explicitement que la différence entre les deux choix vient du fait que le poids statistique n'est plus accompagné par une distribution  $\delta$  à la fin du calcul, ou plus exactement après que l'on a mis en oeuvre la compensation des pathologies.

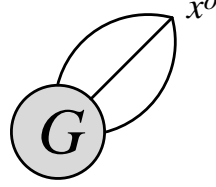
Il semble donc que la différence qui existe dans le résultat final entre les deux choix possibles pour l'argument des poids statistiques soit très étroitement liée au mécanisme de compensation des pathologies. En effet, lorsqu'on isole les termes pathologiques dans le calcul d'un diagramme, on est amené à démembrer toutes les distributions  $2\pi\delta$  en facteur des poids statistiques en  $\Delta_F + \Delta_F^*$ , et les deux termes ne restent pas toujours accolés : il arrive parfois que l'un aille dans la partie pathologique alors que le second reste dans la partie finie. Ensuite, on ignore simplement la partie pathologique en utilisant les relations KMS. On voit donc que dans la partie finie restante les poids statistiques ne sont plus nécessairement accompagnés d'une distribution  $\delta$  qui rend les deux choix équivalents, mais de  $\Delta_F$  ou  $\Delta_F^*$  séparément. C'est la raison pour laquelle le choix de l'argument des poids statistiques a une influence sur la valeur de ces termes finis.

### 3.4 Diagrammes du vide

Les diagrammes du vide sont des diagrammes qui n'ont pas de lignes externes. La discussion faite plus haut a indiqué que cette classe de diagrammes reçoit aussi une contribution de la partie verticale de contour de manière systématique. Il est par ailleurs immédiat de vérifier en utilisant l'identité (3.27-a) que les règles de FEYNMAN obtenues plus haut donnent un résultat nul si on les

applique à ce type de topologies. Il est cependant facile de dire comment elles doivent être modifiées pour cette situation très particulière. A cet effet, isolons par la pensée un des vertex du diagramme du vide considéré, comme illustré sur la figure 3.4. Le diagramme du vide  $D$  peut alors être écrit sous la forme

FIG. 3.4 – Traitement particulier des diagrammes du vide.



$$D = \int_{\mathcal{E}} dx^o G(x^o, \dots, x^o) . \quad (3.34)$$

On a donc besoin d'évaluer une fonction de GREEN  $G$  lorsque tous ses arguments temporels sont égaux. Or, du fait de l'invariance de cette fonction par translation temporelle,  $G(x^o, \dots, x^o)$  ne peut pas dépendre de  $x^o$ , de sorte que  $D = -i\beta G(x^o, \dots, x^o)$ , avec une valeur arbitraire de  $x^o$ . On peut ensuite obtenir la quantité  $G(x^o, \dots, x^o)$  à partir de la fonction  $G^{\{1\dots 1\}}$  calculée dans le formalisme à temps réel. Plus précisément, on a

$$\begin{aligned} G(x^o, \dots, x^o) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \prod_{i=1}^n \frac{dk_i^o}{2\pi} e^{-ik_i^o x^o} \right] G^{\{1\dots 1\}}(k_1^o, \dots, k_n^o) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \prod_{i=1}^n \frac{dk_i^o}{2\pi} \right] G^{\{1\dots 1\}}(k_1^o, \dots, k_n^o) , \end{aligned} \quad (3.35)$$

où la deuxième ligne est obtenue en utilisant le fait que la fonction  $G^{\{1\dots 1\}}$  est proportionnelle à  $\delta(k_1^o + \dots + k_n^o)$ . En regroupant tout ce qui précède, on obtient les règles de FEYNMAN qui permettent de calculer un diagramme du vide dans le formalisme à temps réel. Il suffit en fait d'ajouter une règle à celles que l'on connaît déjà : pour l'un des vertex du diagramme, on ne doit pas sommer sur les deux possibilités 1 et 2, mais lui attribuer d'emblée le type 1. En outre, le résultat final doit être multiplié par  $-i\beta$ . La proportionnalité à  $-i\beta$  est en fait une justification a posteriori de la contribution de la partie verticale à ces diagrammes.

### 3.5 Limite $T = 0$ du formalisme à temps réel

Maintenant que les règles de FEYNMAN du formalisme à temps réel ont été justifiées, je vais montrer que si on les utilise pour calculer une fonction dont

tous les points externes sont de type 1, et si on prend la limite de température nulle de cette fonction, on obtient la fonction de GREEN correspondant à ce diagramme calculée directement avec les règles de FEYNMAN de  $T = 0$  (*i.e.* sans vertex internes de type 2). On a déjà vu plus haut que la limite  $T \rightarrow 0$  du propagateur libre  $G_o^{11}$  est égale au propagateur de FEYNMAN utilisé à  $T = 0$ . Toutefois, comme les autres composantes  $G_o^{12}$ ,  $G_o^{21}$  et  $G_o^{22}$  du propagateur libre n'ont pas une limite nulle, il n'est pas évident a priori que les vertex internes de type 2 se découplent des vertex de type 1 qui sont les seuls à apparaître dans les règles de FEYNMAN de  $T = 0$ .

La preuve de ce découplage fait appel à la relation KMS (deuxième équation de (3.27)) satisfaite par les fonctions de GREEN. Commençons par remarquer que l'on a

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} \left[ \prod_{\{i|a_i=2\}} e^{-\beta k_i^0} \right] = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{\{i|a_i=2\}} k_i^0 > 0 \\ +\infty & \text{si } \sum_{\{i|a_i=2\}} k_i^0 < 0, \end{cases} \quad (3.36)$$

et plus généralement

$$\lim_{T \rightarrow 0^+} \left[ \frac{\prod_{\{i|a_i=2\}} e^{-\beta k_i^0}}{\prod_{\{i|a'_i=2\}} e^{-\beta k_i^0}} \right] = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{\{i|a_i=2\}} k_i^0 > \sum_{\{i|a'_i=2\}} k_i^0 \\ +\infty & \text{si } \sum_{\{i|a_i=2\}} k_i^0 < \sum_{\{i|a'_i=2\}} k_i^0. \end{cases} \quad (3.37)$$

L'étape suivante consiste à ordonner les ensembles d'indices  $\{a_i\}$  en fonction des valeurs des sommes  $\sum_{\{i|a_i=2\}} k_i^o$  des énergies entrant dans la fonction par les points de type 2, en commençant par celui qui donne la plus petite somme. Si on suppose que cette plus petite somme est négative, alors le terme  $\prod_{\{i|a_i=2\}} e^{-\beta k_i^o}$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $T \rightarrow 0$  plus vite que tous les autres termes de la somme qui apparaît dans (3.27-b). Il faut donc que son coefficient soit nul dans cette limite si on veut que la relation KMS continue d'être satisfaite :  $\lim_{T \rightarrow 0} G^{\{a_i\}}(k_i) = 0$ . Ensuite, on considère le jeu d'indices  $\{a'_i\}$  qui donne la valeur suivante de la somme qui a servi à les ordonner. Si cette somme  $\sum_{\{i|a'_i=2\}} k_i^o$  est encore négative, son coefficient  $G^{\{a'_i\}}$  doit aussi avoir une limite nulle lorsque  $T$  tend vers zéro. En répétant cet argument pour tous les ensembles  $\{a_i\}$  qui donnent une somme  $\sum_{\{i|a_i=2\}} k_i^o$  négative, on prouve que la fonction  $G^{\{a_i\}}(\{k_i\})$  doit avoir une limite  $T \rightarrow 0$  nulle si la somme des énergies entrant par les points de type 2 est négative. En d'autres termes, on a

$$\lim_{T \rightarrow 0} G^{\{a_i\}}(\{k_i\}) \propto \theta \left( \sum_{\{i|a_i=2\}} k_i^o \right). \quad (3.38)$$

Voyons maintenant comment cette propriété implique le découplage des vertex de type 2 dans la limite  $T \rightarrow 0$ . A cet effet, considérons un diagramme dont



tous les points externes sont de type 1, on peut donc l'écrire sous la forme

$$F^{\{1\cdots 1\}}(\{k_i\}) = \sum_{a_i=1,2} G^{\{a_i\}}(\{k_i\}) \prod_{i=1}^n G_o^{1a_i}(k_i) . \quad (3.39)$$

Si l'on note que dans la limite  $T \rightarrow 0$ , le propagateur libre  $G_o^{12}(k)$  devient  $2\pi\theta(-k^o)\delta(k^2 - m^2)$ , et ce quel que soit le type de champ considéré, la relation précédente implique dans la limite de température nulle

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} F^{\{1\cdots 1\}}(\{k_i\}) &= \sum_{a_i=1,2} \lim_{T \rightarrow 0} G^{\{a_i\}}(\{k_i\}) \\ &\times \prod_{\{i|a_i=1\}} \Delta_F(k_i) \prod_{\{i|a_i=2\}} 2\pi\theta(-k_i^o)\delta(k_i^2 - m^2) . \end{aligned} \quad (3.40)$$

On voit donc que la relation (3.38) est incompatible avec la présence des  $\theta(-k_i^o)$  associés à chaque point de type 2. Par conséquent, dans le membre de droite de la relation précédente, tous les termes sont nuls excepté celui où tous les  $a_i$  sont égaux à 1. On prouve ainsi de proche en proche que tous les vertex de type 2 doivent disparaître sous peine de conduire à un terme nul dans la limite de température nulle d'un diagramme dont tous les points externes sont de type 1. Ceci achève de prouver que la limite  $T = 0$  de ce formalisme existe et est égale à ce que l'on aurait obtenu par un calcul direct à  $T = 0$ .

### 3.6 Divergences ultraviolettes et renormalisation

Très brièvement, je vais dire quelques mots au sujet de la renormalisation des théories des champs thermiques. C'est en effet l'endroit le plus approprié pour ce faire car le formalisme à temps réel sépare distinctement les contributions thermiques de celles qui existaient déjà à température nulle.

Adoptons plutôt un point de vue physique. Les divergences ultraviolettes viennent de la région des grandes impulsions dans l'espace de FOURIER, et de la région des petites séparations spatio-temporelles si l'on travaille dans l'espace des coordonnées. En d'autres termes, ces divergences sont là parce qu'on suppose que la théorie qu'on a sous la main est capable de décrire ce qui se passe à des échelles spatiales arbitrairement petites, alors que que tout physicien raisonnable se devrait d'être un peu plus modeste. La procédure de renormalisation consiste à montrer que ces infinis peuvent être extirpés de la théorie au moyen d'un redéfinition des paramètres tels que masses et couplages entrant dans le Lagrangien. Le fait de considérer les mêmes champs dans un environnement statistique ne change rien à ces divergences et à la procédure qui permet de s'en débarrasser. En effet, l'échelle de température donne également une échelle de distance qui est la distance moyenne entre deux particules dans le plasma, et cette échelle est fixe. Par conséquent, lorsqu'on sonde des échelles arbitrairement petites pour étudier les divergences ultraviolettes, tout se passe comme si l'on se trouvait dans le vide puisque le plus proche voisin est resté à une distance

finie. Ces considérations permettent de conjecturer le résultat : il est possible de renormaliser une théorie à température finie avec le même jeu de contre-terms (locaux) qu'à température nulle. Ce résultat est prouvé dans [6] d'une manière beaucoup plus formelle.

### 3.7 Formalismes alternatifs

Il est maintenant temps d'expliquer pourquoi le mot formalisme était au pluriel dans le titre de ce chapitre. Quand on parle de formalisme à temps réel sans préciser davantage, il s'agit en général du formalisme que je viens d'exposer. Toutefois, AURENCE et BECHERRAWY ont proposé en 1993 dans l'article [45] une variante de ce formalisme connue sous le nom de formalisme retardé-avancé. Quelques temps plus tard, VAN ELJCK, KOBES et VAN WEERT ont montré dans [46] que cette nouvelle formulation n'était qu'un cas particulier parmi une classe beaucoup plus large de formulations. En gros, l'idée qui sous tend ces nouvelles formulations est de procéder à un changement de base dans le plan des indices 1 et 2. Plus précisément, on définit de nouvelles fonctions de GREEN à partir de celles du formalisme à temps réel par la transformation suivante<sup>19</sup>

$$G^{\{X_i\}}(k_1, \dots, k_n) \equiv \sum_{\{a_i=1,2\}} G^{\{a_i\}}(k_1, \dots, k_n) \prod_{i=1}^n U^{X_i a_i}(k_i), \quad (3.41)$$

où  $U$  est une matrice "de rotation" inversible. Les nouveaux indices  $X_i$  prennent eux aussi deux valeurs, que nous noterons  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$ . Ils seront désignés par des lettres capitales. Afin d'être cohérent, les fonctions de vertex qui s'obtiennent à partir de fonctions de GREEN que l'on ampute de leurs lignes externes sont reliées à celles du formalisme à temps réel par

$$\Gamma^{\{X_i\}}(k_1, \dots, k_n) \equiv \sum_{\{a_i=1,2\}} \Gamma^{\{a_i\}}(k_1, \dots, k_n) \prod_{i=1}^n V^{X_i a_i}(k_i), \quad (3.42)$$

où la matrice  $V$  est définie par

$$V^{Xa}(k) \equiv ((U^T)^{-1})^{Xa}(-k). \quad (3.43)$$

En particulier, cette relation donne l'expression des vertex qui apparaissent dans le développement perturbatif; par exemple :

$$-i\lambda^{ABCD}(k_1, \dots, k_4) = i\lambda \sum_{a=1,2} (-1)^a V^{Aa}(k_1) V^{Ba}(k_2) V^{Ca}(k_3) V^{Da}(k_4), \quad (3.44)$$

pour une théorie en  $\lambda\phi^4$ . A partir de là, il est très simple de trouver les règles de FEYNMAN qui permettent le calcul direct des  $G^{\{X_i\}}$ . Il suffit en effet de relier

---

<sup>19</sup>Les fonctions de GREEN dans le nouveau formalisme seront notées par la même lettre. En pratique, on pourra toujours les distinguer à l'aide des indices qu'elles portent.

par (3.41) le diagramme qui nous intéresse à son expression dans le formalisme initial, et de réécrire tous les objets (propagateurs libres et vertex) qui le constituent en fonction des objets analogues du nouveau formalisme. Il suffit pour cela d'utiliser l'inverse des relations (3.41) et (3.42). Ensuite, on constate que toutes les matrices  $U^{-1}$  issues des propagateurs sont compensées par des matrices  $U$  venant des vertex. A ce stade, il ne reste plus que des propagateurs libres et vertex du nouveau formalisme, et les règles de FEYNMAN qui disent comment les relier sont évidentes. Elles sont résumées sur la figure 3.5.

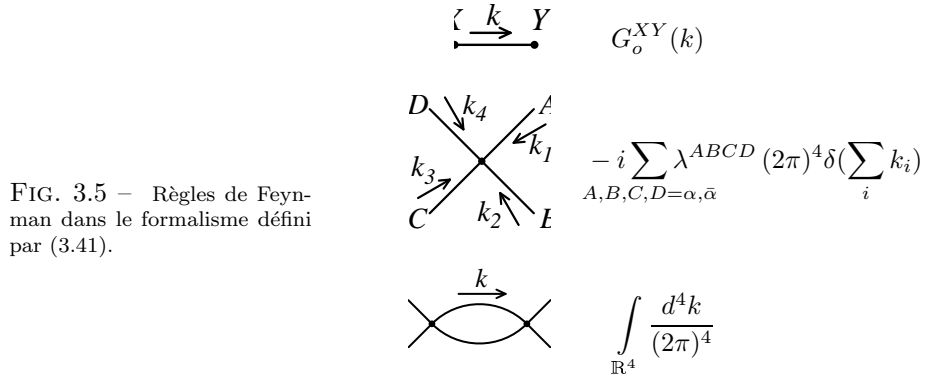


FIG. 3.5 – Règles de Feynman dans le formalisme défini par (3.41).

Parmi toute cette classe de formalismes, le formalisme à temps réel “ordinaire” présente la particularité de n’avoir que deux composantes non nulles pour les vertex nus, alors qu’il peut a priori y en avoir jusqu’à  $2^4$  dans une théorie en  $\lambda\phi^4$ . D’autres formalismes se distinguent par des simplifications au niveau de la matrice des propagateurs. Ainsi, le formalisme dit de KELDysh, présenté dans [46], possède une matrice propagateur dont une composante est nulle. Dans le même ordre d’idées, le formalisme dit “ $F\bar{F}$ ” possède une matrice propagateur qui est diagonale. Malheureusement, cette simplification des propagateurs se fait dans les deux cas au détriment des vertex qui deviennent extrêmement compliqués. En pratique, c’est la raison pour laquelle ces deux variantes ne sont presque jamais utilisées.

Un de ces formalismes alternatifs est en fait assez populaire, mais est rarement présenté de cette façon là. Il est obtenu en prenant

$$U(k) \equiv \begin{pmatrix} e^{\sigma k^0/2} & 0 \\ 0 & e^{-\sigma k^0/2} \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

où  $\sigma$  est un paramètre homogène à l’inverse d’une énergie et variant entre 0 et  $\beta$ . La matrice propagateur correspondant à ce formalisme est

$$G_{o,\sigma}^{ij}(k) = \begin{pmatrix} G_o^{11}(k) & e^{\sigma k^0} G_o^{12}(k) \\ e^{-\sigma k^0} G_o^{21}(k) & G_o^{22}(k) \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

où les  $G_o^{ij}$  (sans l'indice  $\sigma$ ) sont les propagateurs du formalisme à temps réel habituel. Les vertex de ce nouveau formalisme sont inchangés. En fait, ce formalisme est usuellement dérivé d'un contour du type de celui qui est représenté sur la figure 1.2, mais dont la portion  $\mathcal{C}_2$  est distante de l'axe réel de  $i\sigma$ . Les choix les plus populaires de  $\sigma$  sont  $\sigma = 0$  qui correspond au formalisme à temps réel étudié jusqu'ici, et  $\sigma = \beta/2$ .<sup>20</sup>

La seule autre variante du formalisme à temps réel qui est utilisée de façon régulière est le formalisme retardé-avancé, que je vais exposer un peu plus en détail dans la mesure où il sera utilisé plus tard dans cette thèse. Pour une ligne bosonique, la matrice  $U$  à utiliser est

$$U(k) = \frac{1}{a(-k^o)} \begin{pmatrix} a(k^o)a(-k^o) & -a(k^o)a(-k^o) \\ -n_B(-k^o) & -n_B(k^o) \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

où  $a(k^o)$  est une fonction arbitraire dont la seule contrainte est d'être partout non nulle. Une transformation analogue peut être donnée pour des champs transportant une charge, et pour des fermions (voir [45, 47]). Dans tous les cas, cette transformation est construite de telle sorte que la matrice propagateur prenne la forme suivante

$$G^{XY}(k) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_A(k) \\ \Delta_R(k) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

où  $\Delta_{R,A}$  sont les propagateurs retardé et avancé de la théorie des champs à température nulle, définis par  $\Delta_{R,A}(k) \equiv i\mathbb{P}/(k^2 - m^2) \pm \pi\epsilon(k^o)\delta(k^2 - m^2)$ . On voit donc que cette matrice est antidiagonale<sup>21</sup>, et que les composantes non nulles ne dépendent plus de la température. Naturellement, la dépendance en la température a été rejetée dans les vertex. Leur forme explicite n'est complètement fixée qu'une fois que la fonction  $a(k^o)$  a été choisie. Un choix très commode pour les bosons est  $a(k^o) = -n_B(k^o)$ , ce qui conduit aux vertex suivants dans une théorie scalaire

$$\begin{aligned} \lambda^{AAAA} &= \lambda^{RRRR} = 0, \\ \lambda^{ARRR} &= \lambda \text{ et permutations circulaires}, \\ \lambda^{ARRR}(k_1, \dots, k_4) &= -\lambda[1 + n_B(k_1^o) + n_B(k_2^o)] \text{ et permutations circulaires}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

---

<sup>20</sup>Le formalisme obtenu avec  $\sigma = \beta/2$  est souvent désigné par "formalisme à temps réel" dans la littérature, sans plus de précisions. On peut prouver que les fonctions de GREEN dont tous les points externes sont de type 1 sont indépendantes de  $\sigma$ .

<sup>21</sup>Les deux relations (3.27) que vérifient les propagateurs  $G^{ij}$  sont exploitées pour annuler deux des composantes de  $G^{XY}$ . La convention qui conduit à une matrice antidiagonale plutôt que diagonale est parfois considérée comme une hérésie en totale contradiction avec les écrits fondateurs [45]. Néanmoins, comme il ne s'agit que d'une convention, le mieux que le lecteur ait à faire est de s'y habituer car c'est celle que j'utilise par la suite. Quant à moi, j'attends l'inquisition ardécho-libanaise de pied ferme.

et plus généralement

$$\lambda^{\{X_i\}} = \lambda \frac{\prod_{i|X_i=A} n_B(-k_i^o)}{n_B \left( \sum_{i|X_i=R} k_i^o \right)} . \quad (3.51)$$

Dans la situation plus générale où l'on a des fermions, il suffit en fait de remplacer  $n_B$  par  $-n_F$ , et de translater l'argument des poids statistiques de  $-q\mu$  si il y a une charge conservée. On pourra trouver plus de détails dans [46]. Dans cette formulation, les deux relations (3.27) que satisfont toutes les fonctions de GREEN du formalisme à temps réel prennent une forme extrêmement simple :

$$G^{A \cdots A} = 0 , \quad (3.52\text{-a})$$

$$G^{R \cdots R} = 0 . \quad (3.52\text{-b})$$

Leur simplicité rend ce formalisme très adapté à toute étude faisant un usage fréquent de ces propriétés, car les simplifications qui en découlent s'obtiennent presque instantanément.

L'avantage majeur de ce formalisme est de factoriser naturellement les poids statistiques contenus dans un diagramme. Cette particularité rend très souvent les calculs un peu plus clairs. Il possède également des connexions très étroites avec le formalisme à temps imaginaire. En effet, les fonctions de GREEN que l'on calcule dans ce formalisme sont des combinaisons linéaires simples des prolongements analytiques obtenus à partir du formalisme à temps imaginaire [48, 49]. Je montrerai également dans le chapitre suivant que les règles de coupure qui permettent de calculer la partie imaginaire d'une fonction de GREEN ont une expression très simple dans ce formalisme. Par contre, si l'on doit extraire la limite de température nulle d'un diagramme, ce formalisme est beaucoup plus compliqué que le formalisme à temps réel habituel. En effet, l'usage de propagateurs retardés et avancés plutôt que de propagateurs de FEYNMAN engendre dans les étapes intermédiaires du calcul des divergences ultraviolettes beaucoup plus fortes que la divergence réelle du diagramme.

### 3.8 Digressions sur les phénomènes hors d'équilibre

Historiquement, le formalisme à temps réel a été développé par KELDYSH dans [35], où il s'intéressait à une description en termes de théorie des champs de processus hors d'équilibre. En effet, il était tout à fait évident que le formalisme à temps imaginaire ne peut pas se plier à une telle extension. Ainsi, le formalisme à temps imaginaire intègre dans sa structure intime le fait que l'on a des poids statistiques qui sont ceux de l'équilibre thermodynamique, et que l'on peut définir une température. Dès que l'on laisse tomber ces hypothèses, ce formalisme perd tout son sens.

L'idée qui permet de voir le formalisme à temps réel comme une possibilité plus viable de décrire des systèmes hors d'équilibre est la suivante. Comme on l'a

vu dans le chapitre 1, la portion verticale du contour apparaît parce qu'on a un opérateur densité qui est  $\exp(-\beta H)$  et qu'on cherche à extraire sa dépendance dans la constante de couplage. On voit donc d'emblée qu'on n'a plus besoin de cette partie verticale si l'opérateur densité est indépendant de la constante de couplage. L'hypothèse de base de cette extension du formalisme est donc que l'on a un opérateur densité qui est sans relation avec l'Hamiltonien<sup>22</sup>, de sorte que les portions  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$  du contour suffiront pour extraire la dépendance dans la constante de couplage et effectuer le développement perturbatif.

Naturellement, ces hypothèses sont beaucoup trop générales pour permettre de mettre sur pied un développement perturbatif utilisable. En fait, si l'on revient sur le calcul de la fonctionnelle génératrice que j'ai exposé dans le chapitre 1, on voit que le problème va venir du facteur  $C[j]$ , qui n'est plus égal à 1. Quelques auteurs [19, 20, 21] se sont intéressés à l'effet d'un tel terme dans les règles de FEYNMAN, et ont trouvé qu'il introduit des corrélations entre un nombre arbitraire de champs libres. Pratiquement, cela signifie qu'en plus des propagateurs libres qui connectent deux champs, apparaîtront dans le développement perturbatif des objets plus compliqués qui relient trois champs, etc... Pour autant que je sache, personne ne s'est risqué à calculer quoi que ce soit avec de telles règles de FEYNMAN, et le formalisme exposé dans [21] est resté sans suite.

Au lieu de cela, la direction adoptée a plutôt consisté à faire des hypothèses plus restrictives [50, 51] sur la nature de l'opérateur densité afin de supprimer les corrélations contenues dans la fonctionnelle  $C[j]$ . Ainsi, une restriction qui permet ceci consiste à choisir un opérateur densité qui est gaussien dans les opérateurs de création et d'annihilation libres<sup>23</sup> :

$$\rho \equiv \frac{\exp\left(-\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} \beta_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k})\right)}{\text{Tr} \exp\left(-\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} \beta_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k})\right)}, \quad (3.53)$$

où  $\beta_{\mathbf{k}}$  peut formellement être interprété comme l'inverse d'une température dépendant de l'impulsion. Il faut toutefois bien avoir à l'esprit que ce  $\rho$  n'est pas supposé dépendre de la constante de couplage : lorsqu'on "branche" l'interaction dans la théorie, on suppose qu'elle ne modifie pas l'opérateur densité. Avec une telle définition pour  $\rho$ , on a des relations de commutation simples avec les opérateurs de création et d'annihilation libres. Pour des champs scalaires réels, on a ainsi

$$[\rho, a(\mathbf{k})] = (1 - e^{-\beta_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}}) \rho a(\mathbf{k}), \quad (3.54)$$

qui implique les valeurs moyennes suivantes

$$\frac{\text{Tr}(\rho a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}'))}{\text{Tr}(\rho)} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{1}{e^{\beta_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}} - 1}, \quad (3.55\text{-a})$$

<sup>22</sup>Par exemple, il peut être fixé par des conditions initiales qui placent le système dans un état statistique donné. Le point de vue adopté ici est donc très différent de celui que l'on a à l'équilibre. A l'équilibre, l'opérateur densité intervient de façon non triviale dans le développement perturbatif car il contient par construction la constante de couplage.

<sup>23</sup>Dans [51], cette hypothèse apparaît comme résultant d'une troncation dans une expansion en cumulants de l'opérateur densité.

$$\frac{\text{Tr}(\rho a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}'))}{\text{Tr}(\rho)} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left[ 1 + \frac{1}{e^{\beta_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}}} - 1} \right]. \quad (3.55\text{-b})$$

De plus, si l'on se rappelle que la relation (1.49) a été obtenue en utilisant uniquement les relations de commutation entre l'opérateur densité et les opérateurs de création et d'annihilation, il est évident qu'elle survit dans la situation que nous sommes en train de considérer. Par conséquent, il résulte ici aussi que l'on a  $C[j] = 1$ , ce qui signifie que les règles de FEYNMAN ne feront intervenir que des propagateurs, et pas des corrélations d'ordre plus élevé. La seule différence par rapport aux règles de FEYNMAN du formalisme à temps réel réside dans le fait que le poids statistique de BOSE-EINSTEIN doit être remplacé par la fonction qui apparaît dans l'équation (3.55-a). Cette fonction peut a priori être arbitraire si l'on choisit les  $\beta_{\mathbf{k}}$  de façon appropriée. A ce stade, il semble que nous soyons en mesure de calculer le développement perturbatif de fonctions de GREEN définies par tout opérateur densité qui est gaussien.

Toutefois, nous avons vu il y a quelques pages que des produits de distributions non définis sont susceptibles d'apparaître à des stades intermédiaires des calculs effectués avec ce formalisme. Fort heureusement, ces "pathologies" sont éliminées de la théorie à l'équilibre statistique par les identités KMS. On voit que c'est ici que l'on se trouve confronté à de sérieux problèmes avec la généralisation du formalisme à temps réel à une situation hors d'équilibre. En effet, les relations KMS sont une conséquence de la structure très particulière de l'opérateur densité à l'équilibre, qui est non seulement gaussien, mais en outre ne dépend que de l'Hamiltonien  $H$ . La non compensation des pathologies dans cette généralisation du formalisme à temps réel a été notée par ALTHERR et SEIBERT dans l'article [52], et BEDAQUE en a donné une interprétation dans [53], que je vais résumer ici. Si l'on revient aux variables temporelles par une transformation de FOURIER inverse, les résultats de l'appendice A montrent que ces pathologies se transforment en des produits de convolution, qui sont infinis parce que leur support est infini. L'hypothèse de BEDAQUE est que ces pathologies apparaissent ici parce que l'on ne tient pas compte de la relaxation du système vers un état d'équilibre statistique. En effet, le formalisme continue à rester strictement invariant par translation temporelle. D'une certaine façon, l'obtention de ses règles de FEYNMAN est basée sur l'hypothèse selon laquelle on place le système dans un état hors d'équilibre à une date  $t_i$  infiniment éloignée dans le passé. Ensuite, on regarde une fonction de GREEN dont les arguments temporels sont des dates finies, et on trouve qu'elle n'est pas définie à cause de ces pathologies. Selon BEDAQUE, il est incohérent de supposer qu'à cette date finie, le système est encore hors d'équilibre. Un échappatoire serait selon lui de garder fini le temps  $t_i$  auquel on place la système hors d'équilibre, ainsi que le temps  $t_f$ . A l'évidence, les produits de convolutions singuliers du fait d'un support infini deviennent tous finis. Cette suggestion n'a été suivie d'aucune application du fait de la complexité des manipulations dans l'espace des temps.

Envisageons maintenant le problème de la théorie des champs hors d'équilibre avec un autre point de vue : malgré les problèmes que l'on sait pour le formalisme hors d'équilibre dans l'espace de FOURIER, il semble raisonnable

d'espérer décrire un processus microscopique se déroulant dans un milieu hors d'équilibre, à condition que la durée caractéristique de ce processus soit petite devant le temps de relaxation du système vers son état d'équilibre<sup>24</sup>. En outre, il semble également raisonnable d'exiger que cela soit possible avec un formalisme qui diffère "peu" du formalisme à temps réel à l'équilibre. En effet, il n'y a aucune raison pour que la relaxation du système sur de grandes échelles de temps engendre des pathologies dans le calcul d'un processus suffisamment rapide pour qu'il ne voie pas cette relaxation. Le problème des pathologies dans cette extension du formalisme à temps réel semble donc être d'une nature technique, et sans réel fondement physique. La solution qui a été proposée par ALTHERR dans l'article [54] va dans ce sens. En effet, cet article montre qu'il est possible de régulariser les termes pathologiques en donnant une largeur aux propagateurs libres. Cela revient à sommer une self-énergie possédant une partie imaginaire dans la région de genre temps. Cette largeur transforme toutes les pathologies en termes finis qui se comportent comme l'inverse de cette largeur. Physiquement, il est facile d'interpréter ce qui se passe dans cette régularisation : inclure une largeur dans le propagateur libre revient à dire que les excitations de la théorie ont une durée de vie finie qui est de l'ordre de l'inverse de cette largeur. Ainsi, ces quasi-particules qui ont une durée de vie finie ne peuvent plus voir ce qui se passe sur de longues échelles de temps. D'un point de vue technique, on peut noter que ces termes pathologiques deviennent après cette régularisation proportionnels à  $\tau/\tau_{\text{relax}}$ ,<sup>25</sup> où  $\tau$  est la durée de vie des quasi-particules et  $\tau_{\text{relax}}$  le temps de relaxation du système, ce qui corrobore l'interprétation selon laquelle les pathologies viennent du fait qu'il n'est pas correct de donner une durée de vie infinie aux excitations de la théorie si le système n'est pas stationnaire. Il convient cependant de noter que cette régularisation, même si il semble possible de lui donner des fondements physiques raisonnables, pose d'autres problèmes dans le domaine des théories de jauge. Il faut en effet dans ce contexte éviter de briser l'invariance de jauge, ce qui est loin d'être trivial [55, 56].

Pour conclure cette section, on peut formuler le problème de la façon suivante : les pathologies deviennent finies si le temps pendant lequel le système est vu hors d'équilibre par les particules est fini. A ce problème, ALTHERR et BEDAQUE ont apporté des solutions qui sont d'une certaine façon orthogonales. En effet, la resommation d'ALTHERR revient à empêcher que les excitations de la théorie ne voient ce qui se passe sur de grandes échelles de temps en limitant leur durée de vie, ce qui permet d'être un peu cavalier avec la façon dont on traite la relaxation, et même de la négliger en continuant à utiliser un formalisme qui est invariant par translation temporelle. Pour résoudre le même problème, BEDAQUE suggère au contraire de ne rien changer à la durée de vie

---

<sup>24</sup>Par contre, il semble beaucoup plus difficile, si ce n'est impossible, de décrire à l'aide de la théorie des champs le processus de relaxation vers l'équilibre du système. Les poids statistiques à utiliser pour étudier comment sont modifiés des processus microscopiques dans un environnement hors d'équilibre semblent devoir être déterminés par des méthodes extérieures à la théorie des champs.

<sup>25</sup>De tels termes semblent indiquer une connexion entre cette sommation et un développement en gradients.



des particules (*i.e.* de la garder infinie), mais d'inclure correctement la relaxation du système. D'un point de vue pratique, la solution d'ALTHERR semble la plus opérationnelle, comme en témoignent les applications récentes qui en ont été faites [51, 57, 58].

## Chapitre 4

# Règles de coupure dans les formalismes à temps réel

Nuestras horas son minutos  
Cuando esperamos saber,  
y siglos cuando sabemos  
lo que se puede aprender.

ANTONIO MACHADO  
*Proverbios y cantares, Campos de Castilla*

Ce chapitre est encore dédié à la présentation d'un travail en relation avec certains aspects formels du développement perturbatif de la théorie des champs à température finie. Cette fois ci, il s'agit de discuter les règles qui permettent de calculer la partie imaginaire d'une fonction de Green, connues sous le nom de règles de CUTKOSKY à température nulle, ou encore désignées par l'appellation de règles de coupure. En effet, à température nulle, ces règles donnent la partie imaginaire d'un diagramme sous la forme d'une somme de "coupures" que l'on peut faire au travers de ce diagramme. Ces règles sont par ailleurs de la plus haute importance pour vérifier l'unitarité perturbative de la théorie.

En théorie des champs à température finie, l'analogie de ces règles de coupure a été d'abord étudié dans des cas particuliers par WELDON dans [59], et ensuite de manière systématique par KOBES et SEMENOFF dans le cadre du formalisme à temps réel, dans les articles [60, 61]. Ce travail a été réalisé en 1985-1986, et tout le monde semblait s'en satisfaire jusqu'à la sortie en 1995 d'un travail de BEDAQUE *et al.* [62] revisitant cette question et semblant obtenir des conclusions en contradiction avec les résultats antérieurs.

C'est à cette occasion que je me suis intéressé à ce problème, pour au moins deux raisons. La première de ces raisons était d'essayer de comprendre l'origine

de cette contradiction. La seconde était plutôt liée à ma paresse chronique qui me disait que j'aurais pu éviter certains calculs fort fastidieux lors du travail sur la production de photons par un plasma de quarks et de gluons que nous avons entrepris, si j'avais disposé de règles de coupure donnant directement la discontinuité d'une fonction dans le formalisme retardé-avancé. Les résultats de ce travail ont été publiés dans l'article [63], dans lequel je montre l'équivalence des approches de KOBES et SEMENOFF et de BEDAQUE *et al.*, ainsi que les règles de coupure qui permettent de calculer la partie imaginaire des fonctions de GREEN dans les formulations alternatives du formalisme à temps réel, dont le formalisme retardé-avancé.

Je vais commencer ce chapitre par l'exposition de la partie commune aux deux approches. Ensuite, je présenterai plus spécifiquement chacune d'entre elles, et je les comparerai sur un exemple. Enfin, je terminerai ce chapitre par la présentation des règles de coupure que l'on obtient dans les autres versions du formalisme à temps réel, en m'attardant plus longuement sur le formalisme retardé-avancé qui sera utilisé par la suite.

## 4.1 Equation du plus grand temps

Je vais commencer par rappeler le point de départ qui conduit aux règles de coupure en théorie des champs à température finie. La méthode utilisée est extrêmement proche de celle qui est utilisée à température nulle. Tout commence par une décomposition du propagateur libre  $G_o(x^o, y^o; \mathbf{k})$  en deux termes selon<sup>1</sup>

$$G_o(x^o, y^o; \mathbf{k}) \equiv \theta_c(x^o - y^o)G_o^>(x^o, y^o; \mathbf{k}) + \theta_c(y^o - x^o)G_o^<(x^o, y^o; \mathbf{k}) . \quad (4.1)$$

Explicitement, la formule (1.57) donne

$$\begin{aligned} G_o^>(x^o, y^o; \mathbf{k}) &= \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left[ e^{+i\omega_{\mathbf{k}}(y^o - x^o)} (1 + n_B(\omega_{\mathbf{k}})) + e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(y^o - x^o)} n_B(\omega_{\mathbf{k}}) \right] , \\ G_o^<(x^o, y^o; \mathbf{k}) &= \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left[ e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(y^o - x^o)} (1 + n_B(\omega_{\mathbf{k}})) + e^{+i\omega_{\mathbf{k}}(y^o - x^o)} n_B(\omega_{\mathbf{k}}) \right] . \end{aligned} \quad (4.2)$$

Contrairement à ce qui se passe à température nulle, on constate que ces fonctions mélangent les énergies positives et négatives, du fait de la présence de termes en  $n_B$ . Ce détail aura son importance plus tard.

Il faut maintenant distinguer suivant la position des temps  $x^o$  et  $y^o$  sur le contour afin de remplacer les fonctions  $\theta_c$  par des fonctions  $\theta$  ordinaires. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} G_o^{11}(x^o, y^o; \mathbf{k}) &= \theta(x^o - y^o)G_o^>(x^o, y^o; \mathbf{k}) + \theta(y^o - x^o)G_o^<(x^o, y^o; \mathbf{k}) , \\ G_o^{22}(x^o, y^o; \mathbf{k}) &= \theta(x^o - y^o)G_o^<(x^o, y^o; \mathbf{k}) + \theta(y^o - x^o)G_o^>(x^o, y^o; \mathbf{k}) , \\ G_o^{12}(x^o, y^o; \mathbf{k}) &= G_o^<(x^o, y^o; \mathbf{k}) , \\ G_o^{21}(x^o, y^o; \mathbf{k}) &= G_o^>(x^o, y^o; \mathbf{k}) , \end{aligned} \quad (4.3)$$

---

<sup>1</sup>Par construction, les fonctions  $G_o^>$  et  $G_o^<$  introduites ici sont les transformées de FOURIER inverses respectives des fonctions  $G_o^{21}$  et  $G_o^{12}$  du formalisme à temps réel.

où les indices supplémentaires dont on a affublé les propagateurs indiquent sur quelle portion du contour les temps sont supposés se trouver.

Soit ensuite  $G^{\{a_i\}}(\{x_i^o\})$  un diagramme que l'on calcule dans le formalisme à temps réel. Les  $a_i$  sont les types 1 ou 2 des vertex (internes ou externes). Le diagramme est considéré juste avant d'effectuer la transformation de FOURIER de sorte qu'il dépend encore des variables temporelles. Les  $x_i^o$  sont les temps portés par ces vertex. A partir de là, on calcule deux jeux de nouvelles fonctions  $G_{>}^{\{a_i\}}$  et  $G_{<}^{\{a_i\}}$  en soulignant certains des vertex de  $G^{\{a_i\}}$ . Les propagateurs et vertex à utiliser pour les construire sont déterminés au moyen des règles suivantes :

- A un vertex cerclé on associe une constante de couplage dont le signe est l'opposé de celle qui est associée au vertex non souligné du même type 1 ou 2.
- Si  $x^o$  et  $y^o$  ne sont pas soulignés, on utilise le propagateur  $G_o^{ij}(x^o, y^o; \mathbf{k})$ .
- Si  $x^o$  est souligné, mais pas  $y^o$ , on utilise la composante en  $\theta(x^o - y^o)$  de  $G_o^{ij}(x^o, y^o; \mathbf{k})$  pour construire  $G_{>}^{\{a_i\}}$  et sa composante en  $\theta(y^o - x^o)$  pour construire  $G_{<}^{\{a_i\}}$ .
- Si  $x^o$  n'est pas souligné, et  $y^o$  est souligné, on utilise la composante en  $\theta(y^o - x^o)$  de  $G_o^{ij}(x^o, y^o; \mathbf{k})$  pour construire  $G_{>}^{\{a_i\}}$  et sa composante en  $\theta(x^o - y^o)$  pour construire  $G_{<}^{\{a_i\}}$ .
- Si  $x^o$  et  $y^o$  sont tous deux soulignés, on utilise le propagateur  $\tilde{G}_o^{ij}(x^o, y^o; \mathbf{k})$  qui est obtenu en permutant les coefficients de  $\theta(x^o - y^o)$  et de  $\theta(y^o - x^o)$ .

Ensuite, il est aisé avec ces règles d'obtenir la relation connue sous le nom d'équation du plus grand temps. Soit  $x_i^o$  le temps le plus grand dans ce diagramme. On prouve alors la relation

$$G_{>}^{\{\cdots a_i \cdots\}}(x_1^o, \dots, x_n^o) + G_{>}^{\{\cdots \underline{a_i} \cdots\}}(x_1^o, \dots, x_n^o) = 0, \quad (4.4)$$

où la nature soulignée ou pas de tous les vertex non écrits explicitement est la même dans les deux membres. Cette relation découle simplement du signe relatif qui existe entre un vertex souligné et un vertex non souligné, et de la configuration des fonctions  $\theta$  dont on connaît à l'avance la valeur si le temps  $x_i^o$  est le plus grand.

On prouve ensuite que la somme sur toutes les façons de souligner les vertex du diagramme donne une résultat nul :

$$\sum_{\{s_i = \pm\}} G_{>}^{\{a_i, s_i\}}(x_1^o, \dots, x_n^o) = 0, \quad (4.5)$$

où l'indice  $s_i$  supplémentaire indique que le vertex est souligné si  $s_i = +1$  et non souligné si  $s_i = -1$ . Cette relation s'obtient à partir de (4.4) en groupant les  $2^n$  termes par paires ne différant que par le vertex qui porte le plus grand temps. Usuellement, cette relation est plutôt écrite sous la forme équivalente suivante

$$G_{>}^{\{a_i\}}(x_1^o, \dots, x_n^o) + G_{>}^{\{\underline{a_i}\}}(x_1^o, \dots, x_n^o) = - \sum_{(s_i = \pm)} G_{>}^{\{a_i, s_i\}}(x_1^o, \dots, x_n^o), \quad (4.6)$$

où  $\sum_{(s_i=\pm)}$  désigne la somme sur les façons de souligner les vertex de laquelle on exclut le terme où tous les vertex sont soulignés ainsi que celui où aucun n'est souligné.

On obtient une relation identique avec les fonctions  $G_{<}^{\{a_i\}}$ , à condition de commencer par isoler le plus petit temps

$$G_{<}^{\{a_i\}}(x_1^o, \dots, x_n^o) + G_{<}^{\{a_i\}}(x_1^o, \dots, x_n^o) = - \sum_{(s_i=\pm)} G_{<}^{\{a_i, s_i\}}(x_1^o, \dots, x_n^o). \quad (4.7)$$

Il est ensuite trivial de faire la transformée de FOURIER qui conduit véritablement au formalisme à temps réel tel qu'on l'a défini plus haut. Comme dans l'espace de FOURIER, la fonction où tous les vertex sont soulignés est le complexe conjugué de la fonction correspondante où aucun vertex n'est souligné, les relations précédentes se réécrivent de la façon suivante :

$$\text{Im}(iG_{>}^{\{a_i\}}) = \frac{1}{2} \left( G_{>}^{\{a_i\}} + G_{>}^{\{a_i\}} \right) = -\frac{1}{2} \sum_{(s_i=\pm)} G_{>}^{\{a_i, s_i\}}, \quad (4.8)$$

et

$$\text{Im}(iG_{<}^{\{a_i\}}) = \frac{1}{2} \left( G_{<}^{\{a_i\}} + G_{<}^{\{a_i\}} \right) = -\frac{1}{2} \sum_{(s_i=\pm)} G_{<}^{\{a_i, s_i\}}. \quad (4.9)$$

Dans cette équation, les  $a_i$  désignent l'ensemble des vertex, internes aussi bien qu'externes, contenus dans la topologie considérée. Pour calculer une fonction de GREEN du formalisme à temps réel, on doit en outre sommer sur le type 1 ou 2 pour tous les vertex internes. Il faut donc modifier légèrement les notations afin de rendre aisée la distinction entre vertex internes et externes : dorénavant, seuls les vertex externes seront notés  $a_i$ , et les vertex internes seront notés  $v_j$ . Ainsi, la fonction  $G^{\{a_i\}}(k_1, \dots, k_n)$  s'écrit sous la forme

$$G^{\{a_i\}} = \sum_{\{v_j=1,2\}} G^{\{a_i\}\{v_j\}} = \sum_{\{v_j=1,2\}} G_{>}^{\{a_i\}\{v_j\}} = \sum_{\{v_j=1,2\}} G_{<}^{\{a_i\}\{v_j\}}, \quad (4.10)$$

ce qui permet ensuite d'obtenir

$$\begin{aligned} \text{Im}(iG^{\{a_i\}}) &= \sum_{\{v_j=1,2\}} \text{Im}(iG_{>}^{\{a_i\}\{v_j\}}) = \sum_{\{v_j=1,2\}} \text{Im}(iG_{<}^{\{a_i\}\{v_j\}}) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\{v_j=1,2\}} \sum_{(s_i=\pm, r_j=\pm)} G_{>}^{\{a_i, s_i\}\{v_j, r_j\}} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\{v_j=1,2\}} \sum_{(s_i=\pm, r_j=\pm)} G_{<}^{\{a_i, s_i\}\{v_j, r_j\}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ces relations sont le point de départ des deux approches qui vont être confrontées dans la suite de ce chapitre. On peut déjà noter une différence importante par rapport à ce qui se passe à température nulle : le nombre de termes contenus dans leur membre de droite est très important, et ce pour deux raisons. Tous

d'abord, il y a la somme sur les types 1 et 2 des vertex internes qui multiplie le nombre de termes par 2 élevé à la puissance le nombre de vertex. Par ailleurs, il semble à priori difficile de réduire la somme sur la façon de souligner les vertex à une somme sur les coupures<sup>2</sup> traversant le diagramme. En effet, cela est possible à température nulle car les propagateurs reliant un vertex souligné à un vertex non souligné sont proportionnels à  $\theta(\pm k^o)$ . Ces fonctions  $\theta$  contraignent suffisamment le flot d'énergie dans le diagramme pour réduire drastiquement les configurations autorisées des vertex soulignés. A température finie, au contraire, ces propagateurs sont proportionnels à  $\theta(\pm k^o) + n_B(|k^o|)$ , et on ne dispose plus d'aucune contrainte sur le flot d'énergie. Les deux approches que je vais décrire maintenant ont toutes deux pour but de réduire le nombre de termes dans la relation précédente, mais empruntent des directions orthogonales pour y arriver.

## 4.2 L'approche de Kobes et Semenoff

La direction choisie par KOBES et SEMENOFF consiste à simplifier au maximum la somme sur les  $\{v_j = 1, 2\}$ . Pour cela, ils ont commencé par restreindre quelque peu le problème en se limitant au cas où tous les  $a_i$  sont égaux à 1. Cette hypothèse était reliée à l'idée selon laquelle les fonctions avec des points externes de type 1 étaient plus physiques dans la mesure où il s'agit des généralisations directes des fonctions de GREEN que l'on utilise à température nulle<sup>3</sup>.

Ensuite, ils ont remarqué qu'un vertex non souligné de type 2 était équivalent à un vertex souligné de type 1 si l'on utilise les règles pour les fonctions  $G_{>}^{\{a_i\}}$  et en profitent pour écrire

$$G^{\{1\cdots 1\}} = \sum_{\{r_j=\pm\}} G_{>}^{\{1\cdots 1\}\{1_{r_j}\}} . \quad (4.12)$$

De même, on vérifie

$$(G^{\{1\cdots 1\}})^* = \sum_{\{r_j=\pm\}} G_{<}^{\{1\cdots 1\}\{1_{r_j}\}} . \quad (4.13)$$

L'étape suivante consiste à noter que l'on a également

$$G^{\{1\cdots 1\}} = \sum_{\{r_j=\pm\}} G_{<}^{\{1\cdots 1\}\{1_{r_j}\}} , \quad (4.14\text{-a})$$

$$(G^{\{1\cdots 1\}})^* = \sum_{\{r_j=\pm\}} G_{>}^{\{1\cdots 1\}\{1_{r_j}\}} . \quad (4.14\text{-b})$$

---

<sup>2</sup>On appelle diagramme coupé un diagramme qui peut être divisé en deux parties connexes, où l'une de ces parties contient les vertex soulignés et l'autre les vertex non soulignés. Il faut également que chacune de ces deux parties soit reliée à au moins une ligne externe.

<sup>3</sup>Depuis, les applications de la théorie des champs à température finie ont montré qu'il n'y avait pas lieu de considérer ces fonctions comme plus physiques que les autres. La restriction adoptée par KOBES et SEMENOFF n'est cependant pas un problème en pratique car toute l'information pertinente est contenue dans la fonction  $G^{1\cdots 1}$ , même si son extraction peut requérir un peu de travail.

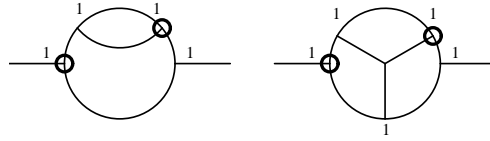
Pour prouver ces relations, il suffit de remarquer que la seule différence entre les règles pour  $G_{>}^{\{a_i\}}$  et  $G_{<}^{\{a_i\}}$  vient des propagateurs reliant un vertex souligné et un vertex non souligné. En d'autres termes, on a  $G_{>}^{11} = G_o^{11}$  et  $G_{>}^{11} = G_o^{21}$ , alors que  $G_{<}^{11} = G_o^{21}$  et  $G_{<}^{11} = G_o^{12}$ . Grâce aux relations KMS, on a  $G_o^{12}(k) = \alpha^{-1}e^{-\beta k^o} G_o^{21}(k)$ , avec le facteur  $\alpha$  défini dans (2.3) dépendant du type des champs considérés. Lors du passage de  $G_{>}$  à  $G_{<}$ , on aura donc un facteur du type de  $\alpha^{-1}e^{-\beta k^o}$  pour chaque propagateur reliant un vertex souligné et un vertex non souligné. Groupons maintenant les vertex soulignés en domaines connexes. Les facteurs  $\alpha^{-1}e^{-\beta k^o}$  qui font passer de  $G_{>}$  à  $G_{<}$  viennent des bords de ces domaines. Si les sommes des charges et des énergies qui entrent dans un tel domaine sont nulles, le produit des  $\alpha^{-1}e^{-\beta k^o}$  associé à la frontière du domaine est égal à 1. Lorsque les vertex externes sont soit tous soulignés, soit tous non soulignés, les domaines vérifient tous cette propriété, ce qui prouve les deux relations annoncées.

Ces relations permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \text{Im}(iG^{\{1\cdots 1\}}) &= \frac{1}{2} \sum_{\{r_j=\pm\}} \left( G_{>}^{\{1\cdots 1\}\{1_{r_j}\}} + G_{>}^{\{1\cdots 1\}\{1_{r_j}\}} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{(s_i=\pm)\{r_j=\pm\}} G_{>}^{\{1_{s_i}\}\{1_{r_j}\}}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

où la somme sur les  $s_i$  évite la configuration où tous les vertex externes sont soulignés et celle où aucun n'est souligné. La deuxième ligne s'obtient par application de (4.8). Cette dernière relation constitue le résultat auquel sont arrivés KOBES et SEMENOFF. On voit donc que l'on a complètement éliminé la somme sur les types 1 et 2 des vertex internes, ce qui réduit significativement le nombre de termes à considérer. Par contre, de même que dans (4.11), il n'est pas possible d'interpréter la somme du second membre comme une somme sur les coupures traversant le diagramme. Ainsi, cette somme peut générer des termes qui ne sont pas interprétables comme la contribution d'une coupure. On trouve par exemple de tels termes dans les diagrammes représentés sur la figure 4.1. En fait, on peut

FIG. 4.1 – Exemples de termes qui ne peuvent pas être interprétés comme la contribution d'une coupure. Les vertex soulignés sont entourés d'un cercle sur la figure.



voir facilement que ces termes sont néanmoins absolument nécessaires pour assurer la compensation des pathologies comme c'est le cas par exemple sur le diagramme de gauche de la figure 4.1. Cependant, il ne serait pas correct de les laisser simplement tomber, car dans certains cas leur contribution est finie et ne

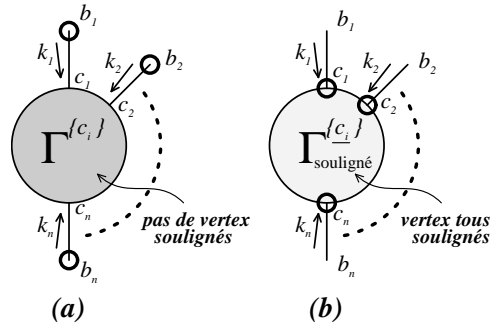
disparaît pas dans le mécanisme de compensation des pathologies, comme on le voit sur le diagramme de droite. Ces termes sont discutés avec plus de détails dans [61]. Dans [64, 65], on pourra trouver une interprétation de ces règles de coupure en termes des processus microscopiques qui se déroulent dans le plasma.

### 4.3 L'approche de Bedaque, Das et Naik

Si l'article [62] a engendré beaucoup de discussions, c'est probablement en partie du à son caractère provocateur puisqu'il affirmait démontrer que "tous les termes qui apparaissent dans les règles de coupure du formalisme à temps réel peuvent être interprétés comme des contributions de diagrammes coupés", sans prendre la peine de discuter la contradiction apparente avec les résultats de KOBES et SEMENOFF que cela implique. Dans cette section, je vais reproduire leur résultat par une méthode un peu plus concise que celle qu'ils ont utilisée. Commençons par énoncer leur résultat : dans la relation (4.11), la somme sur les façons de souligner les vertex du diagramme se réduit à une somme sur les configurations de vertex soulignés qui constituent une coupure du diagramme. Toutes les autres configurations donnent des contributions nulles.

Notons tout d'abord que si la configuration des vertex soulignés ne correspond pas à une coupure, alors on peut isoler un sous-ensemble de vertex soulignés (resp. non soulignés) complètement entouré de vertex non soulignés (resp. soulignés). De tels sous diagrammes sont représentés sur la figure 4.2, où les vertex soulignés sont entourés d'un cercle noir.

FIG. 4.2 – Sous diagrammes caractéristiques des termes qui ne peuvent pas être interprétés comme des coupures.



les relations (4.11) laissent le choix, je vais utiliser les règles qui définissent les fonctions  $G_{<}$ . L'autre choix est également possible, et conduit bien sûr au même résultat. Il s'agit donc d'une décision purement conventionnelle qui en outre n'offre aucun avantage particulier d'un point de vue technique. Pour faciliter ce qui va suivre, je vais rappeler les propagateurs que l'on doit utiliser en



fonction de la nature (souligné ou pas, type 1 ou 2) des vertex qu'il relie.

$$\begin{aligned}
G_{<}^{ij}(k) &\equiv \begin{pmatrix} G_o^{11}(k) & G_o^{12}(k) \\ G_o^{21}(k) & G_o^{22}(k) \end{pmatrix}, \\
G_{<}^{\underline{ij}}(k) &\equiv \begin{pmatrix} G_o^{12}(k) & G_o^{12}(k) \\ G_o^{21}(k) & G_o^{21}(k) \end{pmatrix}, \\
G_{<}^{\underline{i}j}(k) &\equiv \begin{pmatrix} G_o^{21}(k) & G_o^{12}(k) \\ G_o^{21}(k) & G_o^{12}(k) \end{pmatrix}, \\
G_{<}^{\underline{ij}}(k) &\equiv \begin{pmatrix} G_o^{22}(k) & G_o^{12}(k) \\ G_o^{21}(k) & G_o^{11}(k) \end{pmatrix}, \tag{4.16}
\end{aligned}$$

où les notations utilisées sont presque évidentes. Par exemple,  $G_{<}^{\underline{ij}}(k)$  est le propagateur qu'il faut utiliser pour relier un vertex non souligné de type  $i$  à un vertex souligné de type  $j$ . Rappelons également qu'on doit sommer sur les types des vertex  $c_i$  qui apparaissent sur la figure précédente, puisqu'ils sont à l'évidence internes au diagramme.

La somme des termes de (4.11) qui contiennent la configuration (a) de la figure 4.2 est proportionnelle à la quantité :

$$F^{\{\underline{b}_i\}}(\{k_i\}) \equiv \sum_{\{c_i=1,2\}} \Gamma^{\{c_i\}}(\{k_i\}) \prod_{i=1}^n G_{<}^{b_i c_i}(k_i), \tag{4.17}$$

où  $\Gamma^{\{c_i\}}(\{k_i\})$  est la fonction de vertex dont les points externes sont de type  $c_i$  et où entrent les impulsions  $k_i$  (elle est définie de façon à inclure un signe  $-$  pour chaque  $c_i$  égal à 2, puisque ces signes n'ont pas été écrits dans (4.17)). Si on utilise (4.16), il vient

$$F^{\{\underline{b}_i\}}(\{k_i\}) = \prod_{\{i|b_i=1\}} G_o^{12}(k_i) \prod_{\{i|b_i=2\}} G_o^{21}(k_i) \sum_{\{c_i=1,2\}} \Gamma^{\{c_i\}}(\{k_i\}) = 0. \tag{4.18}$$

La dernière égalité est obtenue en utilisant la première des relations (3.27) (en tenant compte de ce qui a été dit des signes  $-$  inclus dans la définition de  $\Gamma^{\{c_i\}}$ ). On voit donc ici que la disparition de ces configurations ne requiert pas KMS. Passons maintenant à la configuration (b) de la figure 4.2. La somme des termes de (4.11) qui contiennent cette configuration est proportionnelle à

$$F^{\{b_i\}}(\{k_i\}) \equiv \sum_{\{c_i=1,2\}} \Gamma_{\text{souligné}}^{\{c_i\}}(\{k_i\}) \prod_{i=1}^n G_{<}^{b_i c_i}(k_i). \tag{4.19}$$

En notant que  $\Gamma_{\text{souligné}}^{\{c_i\}}$  est le complexe conjugué de  $\Gamma^{\{c_i\}}$ , et en utilisant (4.16), on transforme cette quantité en

$$\begin{aligned}
F^{\{b_i\}}(\{k_i\}) &= \sum_{\{c_i=1,2\}} \left[ \Gamma^{\{c_i\}}(\{k_i\}) \right]^* \prod_{\{i|c_i=1\}} G_o^{21}(k_i) \prod_{\{i|c_i=2\}} G_o^{12}(k_i) \\
&= \left[ \prod_{i=1}^n G_o^{21}(k_i) \right] \sum_{\{c_i=1,2\}} \prod_{\{i|c_i=2\}} \left[ \alpha_i^{-1} e^{-\beta k_i^o} \right] \left[ \Gamma^{\{c_i\}}(\{k_i\}) \right]^* = 0. \tag{4.20}
\end{aligned}$$

La dernière égalité utilise la deuxième des relations (3.27). Elle est donc dépendante de la symétrie KMS.

On arrive donc au résultat de BEDAQUE, DAS et NAIK, qui peut s'écrire sous la forme :

$$\text{Im}(iG^{\{a_i\}}) = -\frac{1}{2} \sum_{v_j=1,2} \sum_{\text{coupures}} G_{<}^{\{a_i\}\{v_j\}}. \quad (4.21)$$

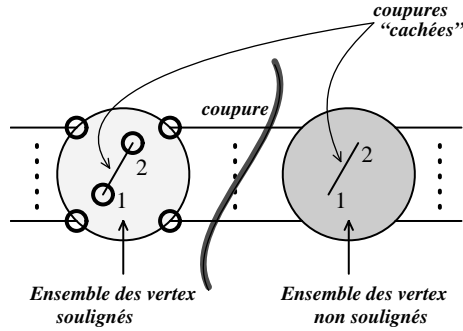
Comme annoncé, la somme sur les configurations de vertex soulignés se réduit à une somme sur celles de ces configurations qui correspondent à des coupures. Par contre, contrairement à la simplification opérée par KOBES et SEMENOFF, la somme sur les types 1 ou 2 des vertex internes n'a pas disparu.

## 4.4 Comparaison

On voit donc que les deux approches conduisent à un paradoxe qu'il convient d'expliquer. En effet, dans l'une des méthodes il s'avère impossible de limiter la somme sur les façons de souligner les vertex à une somme sur des coupures, alors que seuls des termes qui correspondent à des diagrammes coupés demeurent dans la seconde approche. Ce problème n'est pas du tout discuté dans [62].

Pour voir où réside cette contradiction, il convient de rappeler ce que signifie l'expression "propagateur coupé" dans chacune des approches. Dans les deux cas, les auteurs désignent par "coupé" tout propagateur reliant un vertex souligné et un vertex non souligné, suivant en cela la dénomination adoptée à température nulle. Chez KOBES et SEMENOFF, les propagateurs non coupés peuvent être soit  $G_o^{11}$ , soit  $G_{<}^{11} = G_o^{22}$ . Cela signifie que leurs propagateurs non coupés ne sont jamais proportionnels à la distribution de DIRAC  $\delta(k^2 - m^2)$ . Dans l'article de BEDAQUE *et al.* au contraire, les propagateurs non coupés sont n'importe lequel des  $G_{<}^{ij}$  ou  $G_{>}^{ij}$ . Parmi eux, on trouve  $G_o^{12}$  et  $G_o^{21}$  qui sont proportionnels à  $\delta(k^2 - m^2)$ , comme cela est illustré par la figure 4.3. Il donc a priori

FIG. 4.3 – Propagateurs qui seraient considérés comme coupés dans les conventions de Kobes et Semenoff, et qui sont considérés comme normaux par Bedaque *et al.*



évident que dans ces deux articles, le mot "coupé" ne recouvre pas exactement la même classe de propagateurs. Plus précisément, KOBES et SEMENOFF sont

plus stricts dans le sens où ils appellent coupé tout propagateur qui est proportionnel à  $\delta(k^2 - m^2)$ . Or, si davantage de propagateurs sont classés comme “coupés”, il devient difficile voire impossible de n’avoir que des ensembles de propagateurs coupés qui correspondent à des coupures laissant seulement deux sous diagrammes connexes. C’est précisément le problème auquel sont confrontés KOBES et SEMENOFF.

La désaccord apparent entre les deux approches quant à l’interprétation des différentes contributions en termes de coupures semble donc relié à un problème de sémantique plus qu’à un désaccord sur le fond. Néanmoins, il semble que l’approche de BEDAQUE *et al.* et la sémantique qui va avec soit celle qui est la généralisation la plus directe de ce qui se fait à température nulle. En effet, si on prend la limite de température nulle dans la formule (4.21), on trouve en utilisant ce qui a été dit dans la section 3.5 que cette formule donne *terme à terme* la formule donnée par les règles de CUTKOSKY à température nulle. En fait, on peut dire que les propagateurs proportionnels à  $\delta(k^2 - m^2)$  qui sont cachés de part et d’autre de ce que BEDAQUE *et al.* désignent par coupure n’ont rien à voir avec des coupures d’unitarité. On a de tels propagateurs sur couche parce qu’un milieu tel qu’un plasma contient des excitations réelles qui peuvent bien sûr apparaître à l’intérieur d’une amplitude.

Après avoir isolé l’origine de la différence, il est utile de comparer les deux méthodes sur un exemple afin de s’assurer qu’elles donnent bien le même résultat, et surtout pour comparer leur efficacité respective. Pour mettre en évidence certains aspects intéressants, il est utile de choisir un exemple dans lequel on s’expose au problème des pathologies. A cet effet, je considère la composante 11 du premier des diagrammes représentés sur la figure 4.1.

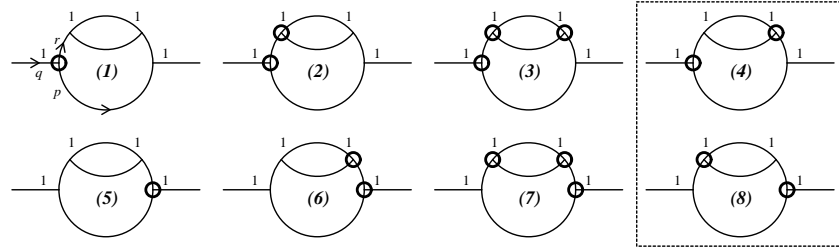


FIG. 4.4 – Les huit termes engendrés par la méthode de Kobes et Semenoff pour l’exemple de la figure 4.1.

La méthode de KOBES et SEMENOFF donne la partie imaginaire de ce diagramme comme la somme des huit termes représentés sur la figure 4.4. Les deux termes dans la boîte sont ceux que l’on ne peut pas interpréter comme des coupures dans la sémantique de KOBES et SEMENOFF. Après un calcul un peu long

mais sans difficulté<sup>4</sup>, on obtient les valeurs suivantes pour ces huit termes (en fait, ils ont été regroupés par paires qui ne diffèrent que par un facteur  $e^{-\beta q^0}$ ) :

$$\begin{aligned} \text{Im}_{(1+5)}^{KS}(\Sigma^{11}(q)) &= \frac{(1 + e^{-\beta q^0})}{2} \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \\ &\times G_o^{21}(p) \left[ \frac{(1 + e^{\beta r^0})\sigma^{21}(r) + e^{\beta r^0}\sigma^{22}(r)}{e^{\beta r^0} - 1} \right] \\ &\times \left\{ 2i\pi^2 \frac{e^{\beta r^0} + 1}{e^{\beta r^0} - 1} \delta^2(r^2 - m^2) + \pi\epsilon(r^0)\delta'(r^2 - m^2) \right\} , \quad (4.24\text{-a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im}_{(2+6)}^{KS}(\Sigma^{11}(q)) &= -\frac{(1 + e^{-\beta q^0})}{2} \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} G_o^{21}(p)\sigma^{21}(r) \\ &\times \left\{ 2i\pi^2 \frac{e^{2\beta r^0} + 1}{(e^{\beta r^0} - 1)^2} \delta^2(r^2 - m^2) + i\mathbb{P} \frac{1}{(r^2 - m^2)^2} \right\} , \quad (4.24\text{-b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im}_{(3+7)}^{KS}(\Sigma^{11}(q)) &= \frac{(1 + e^{-\beta q^0})}{2} \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \frac{e^{\beta r^0} G_o^{21}(p)\sigma^{22}(r)}{e^{\beta r^0} - 1} \\ &\times \left\{ -2i\pi^2 \frac{e^{\beta r^0} + 1}{e^{\beta r^0} - 1} \delta^2(r^2 - m^2) + \pi\epsilon(r^0)\delta'(r^2 - m^2) \right\} , \quad (4.24\text{-c}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Im}_{(4+8)}^{KS}(\Sigma^{11}(q)) &= -\frac{(1 + e^{-\beta q^0})}{2} \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \frac{e^{\beta r^0} G_o^{21}(p)\sigma^{21}(r)}{(e^{\beta r^0} - 1)^2} \\ &\times 4i\pi^2 \delta^2(r^2 - m^2) , \quad (4.24\text{-d}) \end{aligned}$$

où les  $\sigma^{ij}(r)$  sont les composantes de la self-énergie à une boucle. On constate en particulier que la compensation des pathologies en  $\delta^2$  n'a lieu que dans la somme de tous ces termes, et pas au niveau des termes individuels. Si on additionne toutes ces contributions, on obtient

$$\begin{aligned} \text{Im}_{(1+\dots+8)}^{KS}(\Sigma^{11}(q)) &= \frac{(1 + e^{-\beta q^0})}{2} \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} G_o^{21}(p) \left\{ -i\sigma^{21}(r)\mathbb{P} \frac{1}{(r^2 - m^2)^2} \right. \\ &\left. + \pi \left[ \frac{2e^{\beta r^0}\sigma^{22}(r) + (1 + e^{\beta r^0})\sigma^{21}(r)}{e^{\beta r^0} - 1} \right] \epsilon(r^0)\delta'(r^2 - m^2) \right\} . \quad (4.25) \end{aligned}$$

<sup>4</sup>A cet effet, on élimine deux des composantes de la self-énergie à une boucle  $\sigma^{ij}(r)$  en utilisant les deux relations (3.27) qu'elle satisfait :

$$\sigma^{11}(r) + \sigma^{22}(r) + \sigma^{12}(r) + \sigma^{21}(r) = 0 \quad (4.22\text{-a})$$

$$\sigma^{11}(r) + \sigma^{22}(r) + e^{\beta r^0}\sigma^{12}(r) + e^{-\beta r^0}\sigma^{21}(r) = 0 . \quad (4.22\text{-b})$$

Les manipulations sur les distributions utilisent quant à elles

$$\mathbb{P} \frac{1}{x^2} = (\mathbb{P} \frac{1}{x})^2 - \pi^2 \delta^2(x) \quad (4.23\text{-a})$$

$$2\delta(x)\mathbb{P} \frac{1}{x} = -\delta'(x) . \quad (4.23\text{-b})$$

Si on applique maintenant la méthode de BEDAQUE, DAS et NAIK au calcul de la même quantité, il faut calculer les  $6 \times 4 = 24$  termes représentés sur la figure 4.5.

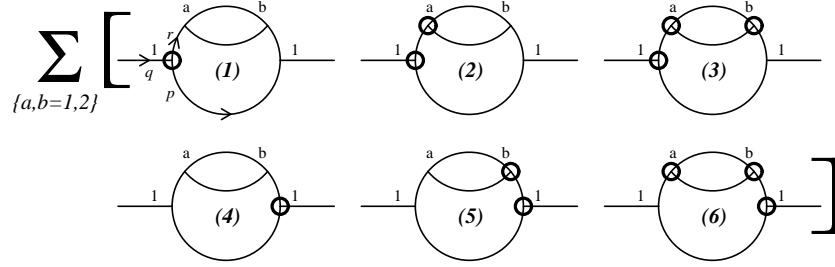


FIG. 4.5 – Les 24 termes engendrés par la méthode de Bedaque *et al.* pour l'exemple de la figure 4.1.

Ici encore, on peut regrouper les termes par paires, ce qui donne les contributions suivantes

$$\begin{aligned} \text{Im}_{(1+6)}^{BDN}(\Sigma^{11}(q)) = & -\frac{(1 + e^{-\beta q^0})}{2} \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} G_o^{21}(p) \left[ \frac{e^{\beta r^0} \sigma^{22}(r) + \sigma^{21}(r)}{e^{\beta r^0} - 1} \right] \\ & \times \{ 2i\pi^2 \delta^2(r^2 - m^2) - \pi \epsilon(r^0) \delta'(r^2 - m^2) \} , \quad (4.26\text{-a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im}_{(2+5)}^{BDN}(\Sigma^{11}(q)) = & -\frac{(1 + e^{-\beta q^0})}{2} \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} G_o^{21}(p) \sigma^{21}(p) \\ & \times \left\{ 2i\pi^2 \delta^2(r^2 - m^2) + i\mathbb{P} \frac{1}{(r^2 - m^2)^2} \right\} , \quad (4.26\text{-b}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Im}_{(3+4)}^{BDN}(\Sigma^{11}(q)) = & \frac{(1 + e^{-\beta q^0})}{2} \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} G_o^{21}(p) \left[ \frac{e^{\beta r^0} (\sigma^{22}(r) + \sigma^{21}(r))}{e^{\beta r^0} - 1} \right] \\ & \times \{ 2i\pi^2 \delta^2(r^2 - m^2) + \pi \epsilon(r^0) \delta'(r^2 - m^2) \} . \quad (4.26\text{-c}) \end{aligned}$$

Naturellement, la somme de ces contributions donne le même résultat que l'équation (4.25). Ici encore, lorsqu'on regroupe uniquement des termes qui correspondent à la même coupure, il reste des pathologies. Elles ne se compensent que dans la somme de l'ensemble des contributions. A l'issue de cette comparaison, on peut dire que la méthode de BEDAQUE *et al.* n'est ni plus simple ni plus rapide à mettre en oeuvre que celle de KOBES et SEMENOFF. En fait, elle engendre en général plus de termes et rend donc les calculs quelque peu plus

longs. Elle offre toutefois l'avantage d'une connexion plus étroite avec les calculs que l'on aurait fait à température nulle.

Je vais terminer par une remarque sur l'interprétation de ces règles de coupure. A température nulle, l'existence de telles règles de coupure pour le calcul de la partie imaginaire d'une amplitude permet de prouver que le développement perturbatif respecte l'unitarité de la théorie. On pourrait être tenté d'utiliser le point de vue de BEDAQUE, DAS et NAIK pour tirer des conclusions similaires en théorie des champs à température finie. Toutefois, parler d'unitarité suppose que l'on sache définir proprement une matrice  $S$ , et donc des états asymptotiques. Or, cette question est très partiellement comprise à l'heure actuelle, ce qui limite l'usage que l'on peut faire de ce résultat dans cette direction.

## 4.5 Règles de coupure des autres formalismes

Je vais maintenant discuter la forme des règles de coupure dans les variantes du formalisme à temps réel qui ont été introduites dans la section 3.7. Initialement, j'avais obtenu ces règles pour le formalisme retardé-avancé en raison de l'usage que j'en faisais, mais il s'est vite avéré très simple de généraliser quelque peu le résultat [63]. A cet effet, il est commode de partir des règles de coupure que nous venons d'établir pour le formalisme à temps réel standard, et de leur faire subir la transformation (3.41). Lorsque la matrice  $U$  qui définit cette transformation est à coefficients réels, il est facile de donner la partie imaginaire des nouvelles fonctions de GREEN comme combinaison linéaire de parties imaginaires de fonctions de GREEN du formalisme de départ, pour lesquelles on connaît les règles de coupure :

$$\text{Im}(iG^{\{X_i\}}(\{k_i\})) = \sum_{\{a_i=1,2\}} \text{Im}(iG^{\{a_i\}}(\{k_i\})) \prod_{i=1}^n U^{X_i a_i}(k_i) . \quad (4.27)$$

A partir de là, il est très facile de reproduire ce qui a été dit dans la section 3.7 pour justifier les règles de FEYNMAN du nouveau formalisme : on écrit chaque objet du membre de droite de l'équation (4.27) en fonction de ses contreparties du nouveau formalisme. Cette procédure fonctionnait parce que les matrices  $U$  se compensent par paires  $UU^{-1}$  lorsqu'on relie les propagateurs aux vertex. Pour qu'on puisse encore l'utiliser ici, il suffit de définir les propagateurs reliant un vertex souligné et un vertex non souligné de la même façon qu'on a défini les propagateurs ordinaires. Ainsi, nous sommes naturellement conduits à poser

$$G_{<}^{XY}(k) \equiv \sum_{\{a,b=1,2\}} U^{Xa}(k) U^{Yb}(-k) G_{<}^{ab}(k) \quad (4.28\text{-a})$$

$$G_{<}^{XY}(k) \equiv \sum_{\{a,b=1,2\}} U^{Xa}(k) U^{Yb}(-k) G_{<}^{ab}(k) \quad (4.28\text{-b})$$

$$G_{<}^{XY}(k) \equiv \sum_{\{a,b=1,2\}} U^{Xa}(k) U^{Yb}(-k) G_{<}^{ab}(k) \quad (4.28\text{-c})$$

$$G_{<}^{XY}(k) \equiv \sum_{\{a,b=1,2\}} U^{Xa}(k) U^{Yb}(-k) G_{<}^{ab}(k) . \quad (4.28-d)$$

Il faut définir de même les vertex soulignés du nouveau formalisme en fonction des vertex soulignés de l'ancien :

$$\begin{aligned} \lambda^{\underline{XYZ}}(k_1, k_2, k_3) &\equiv \sum_{\{a=1,2\}} V^{Xa}(k_1) V^{Ya}(k_2) V^{Za}(k_3) \lambda^a \\ &= -\lambda^{XYZ}(k_1, k_2, k_3) , \end{aligned} \quad (4.29)$$

où la matrice  $V$  est celle qui a été définie par la relation (3.43). Compte tenu de ce qui a été dit plus haut sur la façon de justifier les nouvelles règles de FEYNMAN, il est ensuite immédiat d'obtenir l'analogue de la relation (4.11), sous la forme

$$\text{Im}(iG^{\{X_i\}}(\{X_i\})) = -\frac{1}{2} \sum_{\{V_j\}} \sum_{(s_i=\pm, r_j=\pm)} G_{<}^{\{X_i, s_i\}\{V_j, r_j\}} , \quad (4.30)$$

où la première somme parcourt tous les types possibles pour les vertex internes, et la deuxième somme toutes les façons de souligner les vertex internes et externes, excepté deux d'entre elles. Les fonctions  $G_{<}$  du second membre sont calculées avec les objets que nous venons de définir.

A partir de là, on peut se demander si l'on peut aller plus loin, que ce soit dans la direction empruntée par KOBES et SEMENOFF ou par BEDAQUE *et al.* En fait, comme la méthode de KOBES et SEMENOFF ne s'applique qu'à des fonctions de GREEN du formalisme à temps réel dont les points externes sont de type 1, et que le passage au nouveau formalisme implique une matrice  $U(k)$  qui en général n'est pas diagonale, il semble a priori impossible de suivre cette voie là. Il reste donc la possibilité de montrer que la somme sur les façons de souligner les vertex se réduit en fait à une somme sur les seules coupures au travers du diagramme. A cet effet, commençons par donner l'expression dans le nouveau formalisme des relations (3.27). Il est immédiat d'obtenir<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \sum_{\{Y_i=\alpha, \bar{\alpha}\}} \left[ \sum_{\{b_i=1,2\}} \prod_{\{i|b_i=2\}} (-1) \prod_{i=1}^n (U^T)^{b_i Y_i}(-k_i) \right] G^{\{Y_i\}}(\{k_i\}) &= 0 , \quad (4.31-a) \\ \sum_{\{Y_i=\alpha, \bar{\alpha}\}} \left[ \sum_{\{b_i=1,2\}} \prod_{\{i|b_i=2\}} (-\alpha_i^{-1} e^{-\beta k_i^o}) \prod_{i=1}^n (U^T)^{b_i Y_i}(-k_i) \right] G^{\{Y_i\}}(\{k_i\}) &= 0 , \end{aligned} \quad (4.31-b)$$

où  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$  désignent les deux valeurs possibles prises par les indices  $Y_i$ . Encore une fois, seule la seconde de ces relations est reliée à KMS.

---

<sup>5</sup>Les signes associés à chaque  $b_i = 2$  disparaissent si on travaille avec des fonctions de GREEN qui incluent ces signes dans leur définition, comme c'est en principe le cas pour les fonctions de vertex.

Ces deux relations sont tout ce dont on a besoin pour prouver la compensation des configurations de vertex soulignés qui ne correspondent pas à des coupures. Commençons par considérer la configuration (a) de la figure 4.2 dans le nouveau formalisme. Elle conduit à un terme proportionnel à la quantité

$$\begin{aligned}
F^{\{X_i\}}(\{k_i\}) &\equiv \sum_{\{Y_i=\alpha, \bar{\alpha}\}} \Gamma^{\{Y_i\}}(\{k_i\}) \prod_{i=1}^n G_{<}^{Y_i X_i}(k_i) \\
&= \sum_{\{a_i=1,2\}} \prod_{\{i|a_i=1\}} G_o^{12}(k_i) \prod_{\{a_i=2\}} G_o^{21}(k_i) \prod_{i=1}^n U^{X_i a_i}(k_i) \\
&\times \sum_{\{Y_i=\alpha, \bar{\alpha}\}} \left[ \sum_{\{b_i=1,2\}} \prod_{i=1}^n (U^T)^{b_i Y_i}(-k_i) \right] \Gamma^{\{Y_i\}}(\{k_i\}) = 0, \quad (4.32)
\end{aligned}$$

à cause de (4.31-a). La deuxième configuration de la figure 4.2 donne quant à elle

$$\begin{aligned}
F^{\{X_i\}}(\{k_i\}) &\equiv \sum_{\{Y_i=\alpha, \bar{\alpha}\}} \Gamma_{\text{souligné}}^{\{Y_i\}}(\{k_i\}) \prod_{i=1}^n G_{<}^{Y_i X_i}(k_i) \\
&= \sum_{\{a_i=1,2\}} \prod_{i=1}^n G_o^{21}(k_i) U^{X_i a_i}(k_i) \\
&\times \sum_{\{Y_i=\alpha, \bar{\alpha}\}} \left[ \sum_{\{b_i=1,2\}} \prod_{\{i|b_i=2\}} \alpha_i^{-1} e^{-\beta k_i^o} \prod_{i=1}^n (U^T)^{b_i Y_i}(-k_i) \right] \left[ \Gamma^{\{Y_i\}}(\{k_i\}) \right]^* \\
&= 0, \quad (4.33)
\end{aligned}$$

grâce à (4.31-b). La nullité de ces deux quantités implique donc que seules les configurations qui correspondent à des coupures ont à être prises en compte, ce qui permet d'écrire

$$\text{Im}(iG^{\{X_i\}}(\{k_i\})) = -\frac{1}{2} \sum_{\{V_j\}} \sum_{\text{coupures}} G_{<}^{\{X_i\}\{V_j\}}. \quad (4.34)$$

## 4.6 Le cas particulier du formalisme $R/A$

Je vais maintenant être plus spécifique, et me limiter au formalisme retardé-avancé, en raison de l'usage fréquent que j'en ferai par la suite. En appliquant les relations précédentes, on trouve que l'analogue de (4.16) est donné par

$$\begin{aligned}
G_{<}^{XY}(k) &= \begin{pmatrix} 0 & \Delta_A(k) \\ \Delta_R(k) & 0 \end{pmatrix}, \\
G_{<}^{X\bar{Y}}(k) &= \begin{pmatrix} 0 & \Delta_A(k) - \Delta_R(k) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
G_{<}^{XY}(k) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta_R(k) - \Delta_A(k) & 0 \end{pmatrix}, \\
G_{<}^{XY}(k) &= \begin{pmatrix} 0 & -\Delta_R(k) \\ -\Delta_A(k) & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Concernant les vertex soulignés, ils sont simplement opposés aux vertex non soulignés portant le même jeu d'indices, qui sont donnés par les relations (3.51). La particularité qui rend les règles de coupure du formalisme retardé-avancé très efficaces réside dans les nombreux zéros qui apparaissent dans les matrices propagateurs reliant les vertex soulignés aux vertex non soulignés. Cela implique que dans la formule (4.34), de nombreux termes de la somme sur les types des vertex  $V_j$  sont nuls. Les vertex restent quant à eux relativement simples.

On peut même en déduire un jeu de règles supplémentaires dans le cas fréquent où on doit calculer la partie imaginaire d'une fonction à deux points. Tous les résultats qui vont suivre découlent simplement des zéros contenus dans les propagateurs précédents, et s'obtiennent plus facilement si l'on utilise le concept de "flot de  $\epsilon$ " introduit par GUERIN dans [49].

- L'ensemble connexe des vertex non soulignés doit être relié à la ligne externe à laquelle est attachée l'indice  $R$  (par laquelle le flot de  $\epsilon$  entre dans le diagramme, selon la sémantique de [49]).
- Chaque coupure divise le diagramme en deux amplitudes, l'une d'entre elles étant du type  $AR \cdots R$ , et l'autre du type  $RA \cdots A$ . Ce résultat a en fait déjà été obtenu dans [49], par une approche différente. De telles amplitudes sont des prolongements analytiques de fonctions du formalisme à temps imaginaire (au lieu d'être des combinaisons linéaires de prolongements analytiques comme c'est le cas en général).
- Si la coupure traverse toutes les boucles du diagramme, les deux amplitudes précédentes sont en arbre. Le concept de flot de  $\epsilon$  permet alors de dire que les indices portés par leurs vertex sont totalement déterminés, de sorte qu'il ne reste qu'un seul terme dans la somme sur les types des  $V_j$ .

Comme la majorité des calculs effectués en théorie des champs à température finie concernent des fonctions à deux points, ces résultats sont en fait très utiles en pratique. Ainsi, dans l'exemple que nous avons utilisé plus haut pour comparer les deux approches présentées, les règles de coupure du formalisme retardé-avancé n'engendrent que 3 termes. Les chapitres suivants offriront quelques applications plus concrètes de ces règles de coupure.

## Chapitre 5

# Désintégration du $\pi^0$ et limites d'impulsion nulle

Creio ter-lhes mostrado bem como é complicado o que parece tão singelo. É preciso, em qualquer problema, separar-se cuidadosamente, logo no princípio, os *dados* e as *conclusões* ...

FERNANDO PESSOA

*Novelas policiais, prefácio a Quaresma*

Ce chapitre est le dernier de cette partie dédiée à des aspects formels de la théorie des champs à température finie. L'avoir placé dans cette partie plutôt que dans la partie plus phénoménologique a relevé d'un choix quelque peu arbitraire. En effet, contrairement aux chapitres précédents dont le seul objet était le développement de l'outil lui-même, ce chapitre traite d'une application de la théorie des champs à température finie<sup>1</sup>. Une des raisons pour l'inclure ici tout de même est liée à la nature du problème étudié, qui est en relation avec les propriétés analytiques des fonctions de GREEN thermiques.

Plus précisément, je vais étudier dans ce chapitre la limite d'impulsion nulle du diagramme triangulaire qui couple le pion neutre à deux photons dans le modèle des quarks constituants. Plusieurs calculs à température finie existent pour ce triangle, parmi lesquels [66, 67, 68, 69, 70]. Parmi ces travaux, deux groupes se sont intéressés à la limite d'impulsion nulle de ce diagramme : PISARSKI qui utilise le formalisme à temps imaginaire dans [69, 70], et également

---

<sup>1</sup>Le lecteur y rencontrera même de vraies particules, comme le pion ou le photon. Bref, il est de plus en plus évident que cette partie formelle touche à sa fin...

GUPTA et NAYAK qui utilisent le formalisme à temps réel dans [68]. Le problème est que ces deux approches obtiennent des résultats différents. Cette constatation a été le point de départ de ce travail [71], dont le but était d'expliquer l'origine du désaccord.

Je commencerai par présenter le cadre théorique de cette étude, qui est le modèle  $\sigma$  linéaire. J'exposerai ensuite très brièvement le calcul initial de PISARSKI et la nature du désaccord avec le résultat de GUPTA et NAYAK. Ensuite, je calculerai la limite d'impulsion nulle de ce diagramme triangulaire dans le formalisme retardé-avancé, et montrerai que les résultats de PISARSKI d'une part, et de GUPTA et NAYAK d'autre part, peuvent être obtenus à partir de cette limite si on fixe les conditions cinématiques des lignes externes de façon différente. Après cela, je reviendrai plus en détail sur le problème de la désintégration du pion et montrerai comment les résultats précédents peuvent encore être modifiés à cause de l'extrême sensibilité de ce calcul au secteur infrarouge.

## 5.1 Modèle $\sigma$ linéaire

Le modèle  $\sigma$  linéaire<sup>2</sup> est un modèle phénoménologique impliquant originellement des pions et des nucléons, et qui est invariant sous les symétries chirales. Il a été introduit pour la première fois par GELL-MANN et LEVY en 1960 dans [73], longtemps avant que la chromodynamique quantique ne soit connue. Un tel modèle est basé sur un Lagrangien qui est invariant sous les transformations vectorielles et axiales, notées  $\Lambda_V$  et  $\Lambda_A$ . Sous ces transformations, le pion et le sigma se transforment à l'aide des relations suivantes

$$\Lambda_V \pi_i = \pi_i + \epsilon_{ijk} \Theta_j \pi_k \quad (5.1-a)$$

$$\Lambda_A \pi_i = \pi_i + \Theta_i \sigma \quad (5.1-b)$$

$$\Lambda_V \sigma = \sigma \quad (5.1-c)$$

$$\Lambda_A \sigma = \sigma - \Theta_i \pi_i, \quad (5.1-d)$$

où les  $\Theta_i$  sont des angles qui paramètrent la transformation. Il est immédiat de vérifier que  $\pi^2$  et  $\sigma^2$  sont invariants sous l'action de  $\Lambda_V$ , alors que l'action de  $\Lambda_A$  sur ces quantités donne

$$\Lambda_A \pi^2 = \pi^2 + 2\sigma \Theta_i \pi_i \quad (5.2-a)$$

$$\Lambda_A \sigma^2 = \sigma^2 - 2\sigma \Theta_i \pi_i. \quad (5.2-b)$$

Toutefois, la combinaison  $\pi^2 + \sigma^2$  est invariante sous les deux types de transformations. En ce qui concerne les fermions  $\psi$ , on a les lois de transformation suivantes

$$\Lambda_V \psi = \psi - \frac{i}{2} \tau_i \Theta_i \psi \quad (5.3-a)$$

$$\Lambda_A \psi = \psi - \frac{i}{2} \tau_i \Theta_i \gamma_5 \psi. \quad (5.3-b)$$

---

<sup>2</sup>Cette section est fortement inspirée de la revue [72].

où les  $\tau_i$  sont les matrices de PAULI.

Le terme d'interaction entre le pion et les nucléons<sup>3</sup> est de la forme

$$ig(\bar{\psi}\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi) \cdot \boldsymbol{\pi} , \quad (5.4)$$

où  $g$  est une constante de couplage, et  $\boldsymbol{\tau}$  le trivecteur formé de l'ensemble des trois matrices de PAULI. On constate que ce terme possède les mêmes lois de transformation que  $\boldsymbol{\pi}^2$ , car le facteur qui implique les deux champs du nucléon possède les mêmes nombres quantiques que le pion. Si l'on veut un Lagrangien invariant sous les transformations  $\Lambda_V$  et  $\Lambda_A$ , il faut y ajouter un deuxième terme. Le plus simple est de prendre un terme qui se transforme comme  $\sigma^2$ , de façon à construire une quantité invariante comme l'est  $\boldsymbol{\pi}^2 + \sigma^2$ . Une possibilité consiste à prendre  $g(\bar{\psi}\sigma\psi)$ , de sorte que le terme d'interaction entre les mésons et les nucléons est :

$$\mathcal{L}_I = -g\bar{\psi}[i\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}\gamma_5 + \sigma]\psi . \quad (5.5)$$

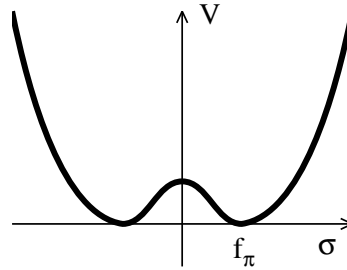
A ce Lagrangien, on ne peut pas ajouter un terme de masse pour le champ  $\psi$  sans briser explicitement l'invariance sous les symétries chirales. Il est toutefois possible d'en engendrer un via les interactions entre mésons et nucléons si le  $\sigma$  possède une valeur moyenne dans le vide non nulle :  $\langle\sigma\rangle = f_\pi$ .

La non nullité de cette valeur moyenne indique une brisure spontanée de cette symétrie, ce qui peut être réalisé si le potentiel pour les mésons n'a pas son minimum à l'origine. Si on veut construire un potentiel invariant sous les symétries chirales, il doit être fonction de l'invariant  $\boldsymbol{\pi}^2 + \sigma^2$ . Un choix simple ayant un minimum non trivial est

$$V(\sigma, \boldsymbol{\pi}) \equiv \frac{\lambda}{4}((\boldsymbol{\pi}^2 + \sigma^2) - f_\pi^2)^2 , \quad (5.6)$$

dont une section est représentée sur la figure 5.1.

FIG. 5.1 – Potentiel des champs mésoniques dans le modèle  $\sigma$  linéaire. Ce graphique en présente une section par le plan de coordonnées  $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$ .



<sup>3</sup>Je considère ici un doublet de nucléons : le proton et le neutron. Cela signifie que le spineur  $\psi$  doit porter un indice indiquant de quelle particule il s'agit. Cet indice se couple aux indices portés par les matrices de PAULI. Comme je n'écrirai pas ces indices explicitement, il faut voir les relations qui suivent comme des relations matricielles.

Il reste seulement à ajouter les termes cinétiques des mésons et des nucléons, dont la forme est<sup>4</sup>

$$\mathcal{L}_{\text{cin}} = i\bar{\psi}\not{D}\psi + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu\boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu\boldsymbol{\pi} , \quad (5.7)$$

de sorte que le Lagrangien complet du modèle  $\sigma$  linéaire est

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\bar{\psi}\not{D}\psi + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu\boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu\boldsymbol{\pi} \\ & - g\bar{\psi}[i\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau}\gamma_5 + \sigma]\psi - \frac{\lambda}{4}((\boldsymbol{\pi}^2 + \sigma^2) - f_\pi^2)^2 . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Comme le minimum du potentiel ne se trouve pas à l'origine  $\sigma = 0, \boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$ , il faut commencer par faire subir une translation aux champs afin d'étudier les fluctuations des champs autour du minimum. On peut par exemple procéder à la redéfinition  $\sigma \rightarrow f_\pi + \sigma$ . Dans ce modèle, le  $\sigma$  possède une masse qui est donnée par la courbure du potentiel dans la direction radiale au voisinage du minimum. Par contre, comme le potentiel ne présente pas de courbure dans les directions orthoradiales, les pions restent sans masse. On peut également noter qu'un masse est engendrée par cette brisure spontanée de symétrie pour les fermions :  $m_\psi = gf_\pi$ , car les fermions se couplent à la valeur moyenne du champ  $\sigma$ .

Le but de ce modèle était précisément d'expliquer pourquoi les pions avaient des masses très petites comparées à celles des autres mésons connus. L'idée naturelle était donc de construire un modèle dans lequel ils apparaissent comme les bosons de GOLDSTONE d'une symétrie spontanément brisée. Toutefois, on sait expérimentalement que la masse des pions est petite mais pas exactement nulle. Ce fait est interprété en disant que la symétrie chirale n'est en fait qu'une symétrie approchée, de sorte que sa brisure spontanée engendre des modes de GOLDSTONE dont la masse n'est pas complètement nulle. Une façon de réaliser cela dans le modèle précédent consiste à inclure un terme  $\epsilon\sigma$  linéaire dans le champ du sigma. Un tel terme a pour effet de lever la dégénérescence entre les vides possibles, puisque le potentiel possède maintenant un minimum absolu. Au voisinage de ce vide, il n'y a plus de direction plate, de sorte que les pions acquièrent une masse. Cette masse reste néanmoins faible si le coefficient  $\epsilon$  du terme de brisure est petit. Dans la suite de ce chapitre, nous garderons le potentiel symétrique donné par l'équation (5.6).

Dans ce qui précède, nous avons dit que les champs fermioniques  $\psi$  désignaient un doublet de nucléons, mais le fait qu'il s'agisse de nucléons n'a en réalité joué aucun rôle dans les lois de transformation. En particulier, au lieu du proton et du neutron, on peut tout aussi bien prendre pour les champs fermioniques le doublet constitué par les quarks  $u$  et  $d$ . Naturellement, la constante de couplage  $g$  est différente. Dans cette situation, le modèle  $\sigma$  linéaire est appelé modèle des quarks constituants. Les motivations pour cette variante du modèle

---

<sup>4</sup>La dérivée covariante  $\not{D}$  inclut le couplage éventuel des nucléons aux photons. Pour être complet, il faut alors ajouter le terme cinétique  $-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$  des photons.

sont diverses : tout d'abord, comme les quarks portent un nombre quantique supplémentaire qui est la couleur, ce modèle donne un très bon accord avec l'expérience si on admet qu'il y a trois couleurs. En outre, à la lumière de la chromodynamique quantique dans laquelle les mésons apparaissent comme des états liés de deux quarks, il semble raisonnable d'introduire un couplage effectif entre un méson et deux quarks, ce couplage pouvant en principe être donné par la chromodynamique quantique.<sup>5</sup> Dans la suite du chapitre, j'utiliserai un modèle de quarks constituants avec deux saveurs de quarks et  $N = 3$  couleurs.

## 5.2 Amplitude de désintégration $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

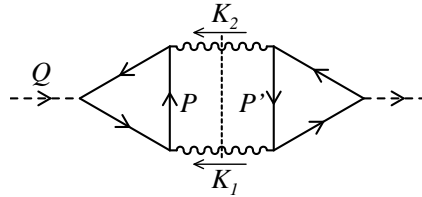
### 5.2.1 Taux de désintégration

Dans cette section, je vais présenter le calcul du diagramme triangulaire qui relie un pion neutre à deux photons. Afin de motiver ce calcul, on peut citer une formule qui sera justifiée dans le chapitre 6 donnant le taux de désintégration des pions dans un bain thermique. Plus précisément, le nombre de désintégrations de pions survenant par unité de temps, par unité de volume du milieu étudié est donné sous la forme suivante

$$\frac{dN}{dt d^3\mathbf{x}} = -\frac{dq_o d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^4} 2e^{q_o/T} n_B(q_o) \text{Im} \Pi^{RA}(q_o, \mathbf{q}), \quad (5.9)$$

où  $\Pi^{RA}(q_o, \mathbf{q})$  est la self-énergie retardée du  $\pi^0$ . Ensuite, à l'aide des règles de coupure présentées dans la section 4.6, on peut écrire la partie imaginaire de cette fonction à deux points comme une somme sur les coupures traversant le diagramme correspondant. Cette formule donne en fait le taux de désintégration total, mais il est possible d'isoler un canal de désintégration particulier en considérant une seule de ces coupures. Le canal  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  n'est obtenu que si l'on considère le diagramme à trois boucles représenté sur la figure 5.2. Plus

FIG. 5.2 – Self-énergie du  $\pi^0$  qui intervient dans la désintégration en deux photons.



spécifiquement, on doit se limiter à la coupure représentée sur cette figure. En

<sup>5</sup>Naturellement, cela n'est pas possible de façon perturbative puisque cela fait appel aux aspects non perturbatifs de la chromodynamique quantique. On peut toutefois envisager de faire la connexion entre le modèle des quarks constituants et le modèle où les champs  $\psi$  sont des nucléons à l'aide de calculs sur réseau.

utilisant les règles de coupure de la section 4.6, on trouve que la contribution de cette coupure à la partie imaginaire de la self-énergie du pion est donnée par la relation suivante

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^{RA}(q_o, \mathbf{q}) = & -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 K_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 K_2}{(2\pi)^4} 2\pi\epsilon(k_1^o)\delta(K_1^2) 2\pi\epsilon(k_2^o)\delta(K_2^2) \\ & \times (2\pi)^4 \delta(Q + K_1 + K_2) \Gamma_{\mu\nu}^{ARR}(Q, K_1, K_2) \Gamma^{RAA\mu\nu}(Q, K_1, K_2), \end{aligned} \quad (5.10)$$

où  $\Gamma_{\mu\nu}^{ARR}(Q, K_1, K_2)$  est la contribution du diagramme triangulaire reliant un pion à deux photons. Cette fonction sera l'objet de notre étude à partir de

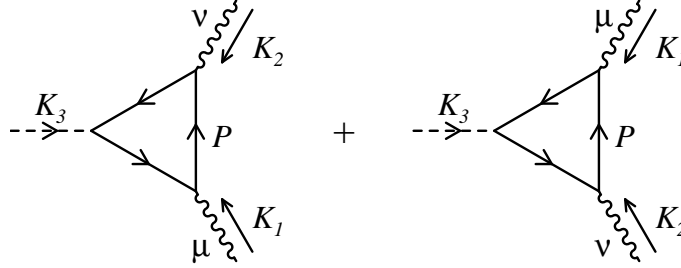


FIG. 5.3 – Les deux triangles contribuant à  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ .

maintenant. Notons cependant que, du fait de la possibilité de croiser les deux photons dans l'état final de la désintégration, il faut considérer les deux diagrammes de la figure 5.3. En pratique le second de ces diagrammes s'obtient à partir du premier en opérant la substitution des indices  $(1, \mu) \leftrightarrow (2, \nu)$ , et ne nécessitera donc aucun calcul supplémentaire.

### 5.2.2 Calcul de Pisarski

Poursuivons avec le calcul de ce triangle effectué par PISARSKI dans [69, 70]. En fait, après avoir factorisé la trace de DIRAC associée à la boucle de quarks, le calcul est effectué dans le formalisme à temps imaginaire, au point particulier où toutes les énergies et tri-impulsions externes sont nulles.<sup>6</sup> Dans cette approche, la somme des deux diagrammes triangulaires est donc donnée par la formule

<sup>6</sup>Mais on ne prend pas la limite d'impulsion nulle dans le numérateur, car cela donnerait un résultat nul. En d'autres termes, on fait un développement en puissances des impulsions externes, et on garde le premier ordre non nul.

suivante<sup>7</sup>

$$\Gamma_{\mu\nu} = 8mNe^2 g \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta T \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[ \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \pi^2 (2n+1)^2 T^2} \right]^3, \quad (5.11)$$

où  $m$  est la masse acquise par le quark circulant dans la boucle du fait de son couplage avec la valeur moyenne du champ  $\sigma$ ,  $e$  sa charge électrique, et  $N$  le nombre de couleurs. Notons que la masse  $m$  a été négligée partout où elle n'est pas nécessaire pour assurer la finitude du résultat (ce qui revient à garder le premier terme non nul dans un développement en puissances de  $m/T$ ) puisqu'on a en vue l'étude du point de restauration de la symétrie chirale. A ce stade, le plus simple est d'effectuer l'intégration sur  $\mathbf{k}$  à l'aide du théorème des résidus, ce qui donne

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu} &= 8mNe^2 g \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta \frac{1}{16\pi^4 T^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2n+1)^3} \\ &= \frac{7\zeta(3)}{16\pi^4} \frac{mNe^2 g}{T^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta. \end{aligned} \quad (5.12)$$

La caractéristique principale de ce résultat est qu'il s'annule lorsqu'on restaure la symétrie chirale, puisqu'alors  $m \rightarrow 0$  comme  $f_\pi$ . C'est là la principale différence avec le résultat obtenu par GUPTA et NAYAK, qui trouvent une amplitude de désintégration proportionnelle à  $m/mT$ , qui tend donc vers une constante lorsque  $m \rightarrow 0$ . Leur calcul a été effectué dans le formalisme à temps réel.

### 5.2.3 Expression dans le formalisme retardé-avancé

Dans le but de cerner précisément l'origine d'une telle différence, le plus simple est d'essayer de reproduire les deux résultats à partir d'une base commune. A cet effet, je vais maintenant calculer l'amplitude de désintégration  $\Gamma_{\mu\nu}^{ARR}$  dans le formalisme retardé-avancé. En utilisant les règles de FEYNMAN de ce formalisme (voir la section 3.7), on obtient facilement

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{ARR}(K_3, K_1, K_2) &= 4mNe^2 g \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta \\ &\times \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \left\{ n_F(p^o + k_2^o) S^A(P - K_1) S^A(P) \text{Disc } S^R(P + K_2) \right. \\ &+ n_F(p^o) S^A(P - K_1) S^R(P + K_2) \text{Disc } S^R(P) \\ &+ n_F(p^o - k_1^o) S^R(P) S^R(P + K_2) \text{Disc } S^R(P - K_1) \Big\} \\ &+ (K_1, \mu) \leftrightarrow (K_2, \nu), \end{aligned} \quad (5.13)$$

---

<sup>7</sup>Cette formule est valable pour une saveur donnée de quark. Si on voulait écrire une formule qui incorpore simultanément les deux saveurs introduites dans le modèle des quarks constituants, il faudrait introduire une matrice de charge  $Q = \text{diag}(e_u, e_d)$ . Il est légitime de traiter séparément les deux saveurs car le couplage du pion neutre aux quarks est proportionnel à l'identité dans l'espace de saveur.



pour une saveur de charge électrique  $e$ . Dans cette formule,  $S^{R,A}(P) \equiv i/(P^2 - m^2 \pm ip^o\epsilon)$  est la partie scalaire des propagateurs retardé et avancé des quarks. En fait, on peut ignorer ici les indices  $R$  et  $A$  des propagateurs car il sera possible de restituer les prescriptions correctes pour le prolongement analytique à la fin du calcul par les substitutions suivantes

$$k_1^o \rightarrow k_1^o + i\epsilon, \quad k_2^o \rightarrow k_2^o + i\epsilon, \quad k_3^o \rightarrow k_3^o - 2i\epsilon. \quad (5.14)$$

A ce stade, on peut utiliser la discontinuité

$$\text{Disc } S^R(P) = 2\pi\epsilon(p^o)\delta(P^2 - m^2) \quad (5.15)$$

du propagateur du quark pour effectuer facilement l'une des intégrations. Il est commode d'utiliser ces distributions  $\delta(\cdot)$  pour effectuer l'intégration sur  $p^o$ , de sorte qu'il reste seulement l'intégration sur la tri-impulsion :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{ARR}(K_3, K_1, K_2) = & 4mN e^2 g \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{\epsilon=\pm} \\ & \times \left\{ \frac{n_F(\omega_{\mathbf{p}+\mathbf{k}_2}) - \theta(-\epsilon)}{2\omega_{\mathbf{p}+\mathbf{k}_2}} \frac{i}{2P \cdot K_2 + K_2^2} \frac{i}{2P \cdot (K_1 + K_2) + K_2^2 - K_1^2} \right\}_{\substack{p^o+k_2^o= \\ \epsilon\omega_{\mathbf{p}+\mathbf{k}_2}}} \\ & + \frac{n_F(\omega_{\mathbf{p}}) - \theta(-\epsilon)}{2\omega_{\mathbf{p}}} \frac{i}{-2P \cdot K_1 + K_1^2} \frac{i}{2P \cdot K_2 + K_2^2} \Big|_{p^o=\epsilon\omega_{\mathbf{p}}} \\ & + \frac{n_F(\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{k}_1}) - \theta(-\epsilon)}{2\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{k}_1}} \frac{i}{2P \cdot K_1 - K_1^2} \frac{i}{2P \cdot (K_1 + K_2) + K_2^2 - K_1^2} \Big|_{\substack{p^o-k_1^o= \\ \epsilon\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{k}_1}}} \Big\} \\ & + (K_1, \mu) \leftrightarrow (K_2, \nu), \end{aligned} \quad (5.16)$$

où je note  $\omega_{\mathbf{p}} \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ . En examinant cette formule, il semble que l'on puisse la rendre beaucoup plus symétrique si on fait le changement de variables  $P + K_2 \rightarrow P$  dans le premier terme et  $P - K_1 \rightarrow P$  dans le troisième terme. Ce changement de variables est valide presque tout le temps, excepté pour une configuration des lignes externes qui est précisément celle qui va reproduire le résultat de PISARSKI. Comme notre but est d'expliquer la différence constatée plus haut à partir d'une base commune, il est préférable de ne pas commencer par singulariser l'une des configurations par un traitement particulier. Par conséquent, je m'interdirai ce changement de variables dans tous les cas. La raison qui le rend parfois illicite sera expliquée ultérieurement.

## 5.3 Ambiguïté de la limite d'impulsion nulle

### 5.3.1 Existence de cette limite

Intéressons nous maintenant à la limite d'impulsion externes nulles de cette amplitude. Plus précisément, on commence par factoriser le numérateur en

$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta$  auquel on ne touche pas, et on considère ensuite la limite d'impulsion nulle des facteurs restants.

Comme les trois impulsions  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$  ne sont pas indépendantes mais reliées par  $K_1 + K_2 + K_3 = 0$  du fait de la conservation de l'impulsion, il faut se débarrasser de l'une d'entre elles au profit des deux autres. On peut ainsi éliminer la variable  $K_3$ , que l'on remplace partout par  $-K_1 - K_2$ . Par ailleurs, comme il est malaisé et inutile d'étudier la limite  $K_{1,2} \rightarrow 0$  de la façon la plus générale qui soit, il est pratique de supposer que les huit composantes de ces quadri-vecteurs ont toutes le même ordre de grandeur qui est contrôlé par un paramètre  $\lambda$ . Cela revient à écrire

$$K_1 \equiv \lambda \hat{K}_1, \quad K_2 \equiv \lambda \hat{K}_2, \quad (5.17)$$

où les composantes de  $\hat{K}_{1,2}$  sont fixes et d'ordre unité. Par cette manipulation, on a restreint le problème de la limite d'une fonction de huit variables à celui, beaucoup plus simple, d'une fonction de la seule variable  $\lambda$ .<sup>8</sup>

Je vais maintenant prouver que la limite  $\lambda \rightarrow 0$  existe pour l'intégrale qui apparaît dans l'équation (5.16). Une estimation naïve indique a priori que cette intégrale est une somme de six termes (trois termes pour chacun des deux triangles de la figure 5.3) dont chacun se comporte comme  $\lambda^{-2}$  dans la limite  $\lambda \rightarrow 0$ . Pour arriver au résultat annoncé, il faut donc mettre en évidence des compensations au niveau des termes en  $\lambda^{-2}$  et  $\lambda^{-1}$ . A cet effet, il faut faire un développement limité autour de  $\lambda = 0$ , jusqu'à l'ordre  $\lambda^0$  inclus, des quantités qui apparaissent sous l'intégrale.

La compensation des divergences les plus fortes, en  $\lambda^{-2}$ , est la plus simple à mettre en évidence car les termes contribuant à cet ordre sont triviaux à extraire. Explicitement, les termes d'ordre  $\lambda^{-2}$  donnent

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{ARR}(K_1, K_2)|_{\lambda^{-2}} &= \frac{4mNe^2g}{\lambda^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{\epsilon=\pm} \frac{n_F(\omega_{\mathbf{p}}) - \theta(-\epsilon)}{2\omega_{\mathbf{p}}} \\ &\times \left\{ \frac{i}{2P \cdot \hat{K}_2} \frac{i}{2P \cdot (\hat{K}_1 + \hat{K}_2)} \Big|_{p^0=\epsilon\omega_{\mathbf{p}}} - \frac{i}{2P \cdot \hat{K}_1} \frac{i}{2P \cdot \hat{K}_2} \Big|_{p^0=\epsilon\omega_{\mathbf{p}}} \right. \\ &\left. + \frac{i}{2P \cdot \hat{K}_1} \frac{i}{2P \cdot (\hat{K}_1 + \hat{K}_2)} \Big|_{p^0=\epsilon\omega_{\mathbf{p}}} \right\} + (\hat{K}_1, \mu) \leftrightarrow (\hat{K}_2, \nu) = 0. \quad (5.18) \end{aligned}$$

Cette compensation peut être vue comme une conséquence de la conservation de l'impulsion, puisque c'est la substitution  $K_3 \rightarrow -K_1 - K_2$  qui l'a rendue automatique.

---

<sup>8</sup>En fait, on fait ici le même genre d'hypothèse que lorsqu'on extrait la contribution de boucle dure (voir le chapitre 7), *i.e.* on suppose que les impulsions externes ont un ordre de grandeur commun qui est très petit devant l'échelle d'impulsion naturelle dans la boucle. Cette dernière est fixée par la température dans le cas des boucles dures, et par la masse  $m$  ici du fait de divergences infrarouges.

En ce qui concerne les termes d'ordre  $\lambda^{-1}$ , on peut montrer que leur compensation découle des propriétés de parité satisfaites par l'amplitude de désintégration :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{ARR}(K_1, K_2) = \Gamma_{\mu\nu}^{ARR}(-K_1, -K_2), \quad (5.19)$$

ce qui implique ensuite

$$\Gamma_{\mu\nu}^{ARR}(\lambda, \hat{K}_1, \hat{K}_2) = \Gamma_{\mu\nu}^{ARR}(-\lambda, \hat{K}_1, \hat{K}_2). \quad (5.20)$$

La parité en  $\lambda$  de l'amplitude de désintégration du pion en deux photons permet de dire d'emblée que les termes d'ordre  $\lambda^{-1}$  se compensent. Par conséquent, si on écrit

$$\Gamma_{\mu\nu}^{ARR}(\lambda, \hat{K}_1, \hat{K}_2) \equiv 4mNe^2 g \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{ARR}(\lambda, \hat{K}_1, \hat{K}_2), \quad (5.21)$$

alors la limite de  $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{ARR}(\lambda, \hat{K}_1, \hat{K}_2)$  existe lorsque  $\lambda$  tend vers zéro.<sup>9</sup>

### 5.3.2 Calcul des termes en $\lambda^0$

Maintenant que l'on a prouvé que la limite  $\lambda \rightarrow 0$  existe pour cette quantité, il ne reste plus qu'à l'extraire. On doit pour cela poursuivre le développement limité de l'intégrand jusqu'à l'ordre  $\lambda^0$  inclus. Il s'agit d'une tâche triviale, bien qu'un peu fastidieuse si on le fait à la main, qui donne le résultat suivant

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Gamma_{\mu\nu}^{ARR}(\lambda, \hat{K}_1, \hat{K}_2) &= 4mNe^2 g \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \\ &\times \left\{ \frac{3}{8} \frac{1 - 2n_F(\omega_{\mathbf{p}})}{\omega_{\mathbf{p}}^5} \right. \\ &\quad - \frac{A(\hat{K}_1, \hat{K}_2)}{4} \frac{n'_F(\omega_{\mathbf{p}})}{\omega_{\mathbf{p}}^4} \prod_{i=1}^3 \frac{1}{\left[ (\mathcal{P}_+ \cdot \hat{K}_i)(\mathcal{P}_- \cdot \hat{K}_i) \right]^2} \\ &\quad \left. - \frac{B(\hat{K}_1, \hat{K}_2)}{4} \frac{n''_F(\omega_{\mathbf{p}})}{\omega_{\mathbf{p}}^3} \prod_{i=1}^3 \frac{1}{(\mathcal{P}_+ \cdot \hat{K}_i)(\mathcal{P}_- \cdot \hat{K}_i)} \right\}, \quad (5.22) \end{aligned}$$

où on note  $\mathcal{P}_\pm \equiv (\omega_{\mathbf{p}}, \pm \mathbf{p})$ . Les coefficients  $A$  et  $B$  sont quant à eux donnés par les expressions suivantes

$$\begin{aligned} A(K_1, K_2) &= k_1^{o3} k_2^{o5} (3k_1^o + k_2^o) (k_1^o k_2^2 + k_2^o k_1^2) \omega_p^{12} \\ &\quad + k_1^o k_2^{o4} \left[ k_1^o k_2^{o4} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 \right. \\ &\quad + k_1^{o2} k_2^{o3} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 + 2k_1^{o2} k_2^{o3} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) \\ &\quad \left. + k_2^{o3} k_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 + 10k_1^{o3} k_2^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) \right] \end{aligned}$$

<sup>9</sup>A strictement parler, cela n'implique pas que la limite de  $\Gamma_{\mu\nu}^{ARR}$  existe lorsque  $K_1$  et  $K_2$  tendent vers zéro. En fait, ce qui va suivre montrera que cette limite n'existe pas puisqu'on ne peut pas la définir de manière unique.

$$\begin{aligned}
& -2 k_1^{o3} k_2^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 - k_1^{o3} k_2^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 \\
& + 2 k_1^o k_2^{o2} \mathbf{k}_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) - 3 k_1^o k_2^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 \mathbf{k}_2^2 \\
& + 6 k_1^o k_2^{o2} \mathbf{k}_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 + 4 k_1^{o2} k_2^o \mathbf{k}_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) \\
& - 10 k_1^{o2} k_2^o \mathbf{k}_2^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 + 8 k_1^{o4} k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) \\
& - 2 k_1^{o2} k_2^o \mathbf{k}_2^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) + 10 k_1^{o2} k_2^o \mathbf{k}_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 \\
& - 3 k_1^{o4} k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 - 3 k_1^{o2} k_2^o \mathbf{k}_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 \\
& - 10 k_1^{o3} \mathbf{k}_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 + 5 k_1^{o3} \mathbf{k}_2^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 \Big] \omega_p^{10} \\
& + k_2^{o3} \Big[ 4 k_1^{o3} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_2^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^3 \\
& - 8 k_1^{o3} \mathbf{k}_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^3 - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 k_2^{o5} \\
& - 2 k_2^{o4} k_1^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^3 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) - 20 k_2^{o3} k_1^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^3 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) \\
& - 3 k_2^{o4} k_1^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 - 26 k_2^o k_1^{o4} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^3 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) \\
& - 9 k_2^o k_1^{o4} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^4 + 7 k_2^{o2} k_1^{o3} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 \\
& - 36 k_2^{o2} k_1^{o3} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^3 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) + 3 k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 k_1^{o4} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 \\
& - 12 k_2^{o3} k_1^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 - 18 k_2^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 k_1^{o3} \\
& + k_2^{o3} k_1^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 - 4 k_2^{o2} k_1^{o3} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^3 \\
& - 12 k_1^{o3} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 \mathbf{k}_2^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 + 3 k_1^{o3} \mathbf{k}_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^4 \\
& - 4 k_2^{o2} k_1^o \mathbf{k}_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^3 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) + 2 k_2^{o2} k_1^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^3 \mathbf{k}_2^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) \\
& + 7 k_2^{o2} k_1^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 \mathbf{k}_2^2 - 5 k_2^o k_1^{o2} \mathbf{k}_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 \\
& - 3 k_2^{o2} k_1^o \mathbf{k}_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 - 5 k_2^{o2} \mathbf{k}_1^2 k_1^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 \\
& - k_2^{o3} \mathbf{k}_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 + 2 k_2^{o3} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 \mathbf{k}_2^2 \\
& + 7 k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 k_1^{o2} \mathbf{k}_2^2 - 6 k_2^o k_1^{o2} \mathbf{k}_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^3 \\
& - 9 k_2^o k_1^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 \mathbf{k}_2^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 - 4 k_2^o \mathbf{k}_1^2 k_1^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^3 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) \\
& - 4 k_2^o k_1^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^3 \mathbf{k}_2^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) - 12 k_2^o k_1^{o2} \mathbf{k}_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 \Big] \omega_p^8 \\
& + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) k_2^{o2} \Big[ 6 k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^3 \mathbf{k}_1^2 k_1^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 \\
& + 3 k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) k_1^o \mathbf{k}_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^4 - 4 k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 k_1^o \mathbf{k}_2^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^3 \\
& + 6 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^5 k_2^{o4} + 8 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) k_2^{o4} \\
& + 2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^3 k_1^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 k_2^{o3} \\
& + 17 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) k_2^{o2} k_1^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^4 + 20 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 k_2^{o3} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) k_1^o \\
& + 4 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 k_2^{o3} k_1^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^3 + 56 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 k_2^{o2} k_1^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^3 \\
& + 13 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^5 k_1^o k_2^{o3} + 13 k_2^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^5 k_1^{o2} \\
& + 34 k_2^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) k_1^{o2} + 2 k_2^o k_1^{o3} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^5 \\
& + 31 k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) k_1^{o3} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^4 + 40 k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 k_1^{o3} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^3 \\
& + 16 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 k_1^{o2} \mathbf{k}_2^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^3 + 6 k_1^{o2} \mathbf{k}_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 42 k_2^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^3 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 k_1^{o2} + 14 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) k_1^{o2} k_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^4 \\
& + 11 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) k_1^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^4 k_2^2 - k_2^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^5 k_1^2 \\
& - 2 k_2^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^3 k_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 + 4 k_2^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^3 k_2^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 \\
& + 4 k_2^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 k_2^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) - k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^5 k_2^2 k_1^o \\
& + 4 k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 k_2^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) k_1^o - 2 k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 k_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) k_1^o \\
& - 4 k_2^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 k_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) + 2 k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^3 k_1^o k_2^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 \\
& + 8 k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 k_1^o k_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^3 \Big] \omega_p^6 \\
& - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 k_2^o \Big[ 10 k_2^{o3} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^5 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) + 22 k_2^{o3} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 \\
& + 24 k_2^{o3} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^3 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^3 + 3 k_2^{o3} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^6 + 8 k_2^{o3} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^4 \\
& + 23 k_2^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 k_1^o + 44 k_2^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^3 k_1^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^3 \\
& + 2 k_2^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) k_1^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^5 + 19 k_2^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 k_1^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^4 \\
& + 12 k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^3 k_2^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^3 - 4 k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^3 k_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^3 \\
& + 25 k_2^o k_1^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^6 + 76 k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) k_1^{o2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^5 \\
& + 2 k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^5 k_2^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) - 3 k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 k_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^4 \\
& + 8 k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 k_2^2 - k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 k_1^2 \\
& + 48 k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^4 k_1^{o2} + 6 k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 k_2^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^4 \\
& + 4 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) k_1^o k_1^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^5 + k_1^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^6 k_1^2 \\
& + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 k_1^o k_2^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^4 - 2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) k_1^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^5 k_2^2 \Big] \omega_p^4 \\
& + 6((\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)) k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 \Big[ k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^3 \\
& + 3 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) \\
& + 4 k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 + 2 k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^3 + 2 k_1^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^3 \Big] \omega_p^2 \\
& - 3 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^4 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^6 ((\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2) + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)) (3 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)) \\
& + (k_1^o, \mathbf{k}_1) \leftrightarrow (k_2^o, \mathbf{k}_2) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(K_1, K_2) &= k_1^o k_2^{o2} \Big[ k_1^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 + k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 \Big] \omega_p^4 \\
& - k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 \Big[ (k_1^o + k_2^o) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^2 - k_2^o (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1) (\mathbf{p} \cdot (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)) \Big] \omega_p^2 \\
& - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1)^2 (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2)^3 (\mathbf{p} \cdot (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)) \\
& + (k_1^o, \mathbf{k}_1) \leftrightarrow (k_2^o, \mathbf{k}_2) .
\end{aligned}$$

Voilà, c'est fini.<sup>10</sup> Au delà du détail des fonctions  $A$  et  $B$  que seul un calcul explicite peut donner, la structure de la limite donnée par la relation (5.22)

<sup>10</sup>Dans quelques pages, c'est la fin du chapitre, et le lecteur aura bien mérité un petit digestif.

est quant à elle évidente à priori. Il faut en effet calculer la dérivée seconde de l'intégrand pour atteindre les termes en  $\lambda^0$ , ce qui engendre des dérivées secondes des poids statistiques et des dénominateurs.

Discutons maintenant quelques propriétés simples de ce résultat. On remarque tout d'abord une dépendance résiduelle dans les quantités  $\hat{K}_{1,2}$ , ce qui signifie que la limite  $\lambda \rightarrow 0$  dépend du chemin suivi pour atteindre le point  $K_1 = K_2 = 0$ . Une telle propriété est usuelle pour les fonctions de GREEN thermiques. Ainsi, si on applique la même procédure à la composante  $\Pi_{00}^{RA}$  du tenseur de polarisation retardé du photon en QED, on obtient

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Pi_{00}^{RA}(\lambda, \hat{K}) = 4e^2 \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} n'_F(p) \frac{(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}{(\mathcal{P}_+ \cdot \hat{K})(\mathcal{P}_- \cdot \hat{K})} . \quad (5.25)$$

Nous verrons dans le chapitre 7 que ce résultat n'est autre que la contribution de boucle dure à cette fonction. Ici aussi, la dépendance résiduelle vis à vis de  $\hat{K}$  indique la non unicité de la limite d'impulsion nulle. Cette non unicité implique que le Lagrangien effectif qui engendrerait cette fonction comporte des termes non locaux (*i.e.* dans lesquels des dérivées apparaissent au dénominateur).

On peut également vérifier très facilement que la non unicité de la limite d'impulsion nulle observée ici est un phénomène purement thermique. En effet, si on prend la limite de température nulle dans la relation (5.22), en utilisant le fait que  $\lim_{T \rightarrow 0} n_F(\omega_{\mathbf{p}}) = \lim_{T \rightarrow 0} n'_F(\omega_{\mathbf{p}}) = \lim_{T \rightarrow 0} n''_F(\omega_{\mathbf{p}}) = 0$  lorsque  $m > 0$ , on trouve

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0, T \rightarrow 0} \Gamma_{\mu\nu}^{ARR}(\lambda, \hat{K}_1, \hat{K}_2) = 4mNe^2 g \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{3}{8\omega_{\mathbf{p}}^5} , \quad (5.26)$$

qui ne dépend plus de  $\hat{K}_{1,2}$ .

On peut cependant noter une différence de taille entre l'exemple simple de l'équation (5.25) et la formule (5.22). En effet, l'approximation qui donne (5.25) ne nécessite le calcul que des deux premiers ordres en  $\lambda$ . Ici aussi, le premier ordre s'annule du fait de la conservation de l'impulsion, mais l'ordre suivant est non nul, ce qui permet de s'arrêter là. Dans le cas de l'amplitude de désintégration du pion au contraire, le deuxième ordre est également nul, ce qui oblige d'en calculer un troisième. Naturellement, la complexité et le nombre des termes croît avec l'ordre auquel on s'arrête dans ce développement. Si on ajoute à cela le fait que l'on considère ici une fonction à trois points au lieu d'une fonction à deux points, il est donc assez peu surprenant que les fonctions  $A$  et  $B$  soient beaucoup plus complexes que ce qu'on rencontre dans (5.25). Par conséquent, on peut s'attendre à ce que la non localité exhibée par le couplage effectif  $\pi^0 \gamma \gamma$  soit d'une nature très différente de celle que l'on rencontre dans le contexte des boucles dures.

### 5.3.3 Photons réels

Comme la limite obtenue dans (5.22) dépend du détail de la configuration cinématique des lignes externes, il semble raisonnable de s'attendre à ce que la

différence entre les calculs de PISARSKI et ceux de GUPTA et NAYAK vienne de cette particularité. Pour le calcul de GUPTA et NAYAK, on voit d'emblée qu'ils ont fait leur calcul avec des photons réels ( $K_{1,2}^2 = 0$ ) et avec un pion qui est au repos dans le référentiel du plasma ( $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{0}$ ). Si on choisit  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{0}$  et  $k_1^o = k_2^o = -||\mathbf{k}_{1,2}||$ , les fonctions  $A$  et  $B$  deviennent beaucoup plus simples qu'elles ne le sont dans le cas général

$$\begin{aligned} A(\hat{K}_1, \hat{K}_2) &= 16\hat{k}_1^{o4}\omega_{\mathbf{p}}^4[(\omega_{\mathbf{p}}\hat{k}_1^o)^2 - (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{k}}_1)^2]^4 \\ B(\hat{K}_1, \hat{K}_2) &= 4\hat{k}_1^{o2}\omega_{\mathbf{p}}^2(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{k}}_1)^2[(\omega_{\mathbf{p}}\hat{k}_1^o)^2 - (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{k}}_1)^2], \end{aligned} \quad (5.27)$$

et la fonction  $\Gamma_{\mu\nu}^{ARR}$  devient

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Gamma_{\mu\nu}^{ARR}(\lambda, \hat{K}_1, \hat{K}_2) &= 4mNe^2g\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}k_1^\alpha k_2^\beta \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \\ &\times \left\{ \frac{3}{8} \frac{1 - 2n_F(\omega_{\mathbf{p}})}{\omega_{\mathbf{p}}^5} - \frac{1}{4} \frac{n'_F(\omega_{\mathbf{p}})}{\omega_{\mathbf{p}}^4} - \frac{1}{4} \frac{n''_F(\omega_{\mathbf{p}})}{\omega_{\mathbf{p}}^3} \frac{(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2}{\omega_{\mathbf{p}}^2 - (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2} \right\}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

où je note  $\hat{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{k}_1/||\mathbf{k}_1||$  le vecteur unité dans la direction d'émission du premier photon. On peut vérifier que le prolongement analytique défini par (5.14) engendre des termes en  $\delta(\omega_{\mathbf{p}}^2 - (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2)$  que nous n'avons pas écrits ici car ils sont nuls du fait de  $\omega_{\mathbf{p}} > p$ . L'amplitude de désintégration reste donc réelle dans cette configuration.

On constate que l'intégration angulaire sur la direction de l'impulsion du quark devient singulière si on annule la masse  $m$ . En effet, elle souffre d'une divergence colinéaire au point où le quark est parallèle à la direction d'émission des photons. Cela se traduit par un logarithme dans le résultat de cette intégration angulaire

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Gamma_{\mu\nu}^{ARR}(\lambda, \hat{K}_1, \hat{K}_2) &= 4mNe^2g\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}k_1^\alpha k_2^\beta \int_0^{+\infty} \frac{p^2 dp}{(2\pi)^2} \\ &\times \left\{ \frac{3}{4} \frac{1 - 2n_F(\omega_{\mathbf{p}})}{\omega_{\mathbf{p}}^5} - \frac{n'_F(\omega_{\mathbf{p}})}{2\omega_{\mathbf{p}}^4} + \frac{n''_F(\omega_{\mathbf{p}})}{2\omega_{\mathbf{p}}^3} \left( 1 - \frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2p} \ln \left( \frac{\omega_{\mathbf{p}} + p}{\omega_{\mathbf{p}} - p} \right) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Néanmoins, comme cette singularité n'est que logarithmique, l'intégrale à venir sur la norme du vecteur  $\mathbf{p}$  fera disparaître ce logarithme du résultat final. En intégrant par parties l'intégrale précédente, on arrive à la forme plus simple suivante

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Gamma_{\mu\nu}^{ARR}(\lambda, \hat{K}_1, \hat{K}_2) = 4mNe^2g\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}k_1^\alpha k_2^\beta \int_0^{+\infty} \frac{p dp}{(2\pi)^2} \frac{1 - 2n_F(\omega_{\mathbf{p}})}{4\omega_{\mathbf{p}}^4} \ln \left( \frac{\omega_{\mathbf{p}} + p}{\omega_{\mathbf{p}} - p} \right), \quad (5.30)$$

qui n'est rien d'autre que le résultat de GUPTA et NAYAK (voir la formule (2.12) de leur article [68]). D'un point de vue technique, on peut noter que cette expression est celle que l'on aurait directement obtenue si on avait utilisé les changements de variables que j'ai mentionnés après l'équation (5.16). En d'autres

termes, cela signifie que faire le développement en  $\lambda$  suivi d'une intégration par parties pour se débarrasser des dérivées de la fonction  $n_F$  est équivalent à faire d'abord ce changement de variables suivi du développement en puissances de  $\lambda$ , *dans les cas où ce changement de variables est légitime*. Ici, à l'évidence, il l'est.

On va maintenant s'intéresser à ce qui se passe au voisinage du point de restauration de la symétrie chirale, c'est à dire à la limite  $m/T \rightarrow 0$ . On voit que l'on n'est pas autorisé à prendre directement la limite  $m \rightarrow 0$  dans l'intégrand, car cela donnerait une intégrale sur  $p$  qui se comporterait comme  $dp/p^2$  dans la région infrarouge. Cela signifie que si l'on effectue un développement en puissances de  $m/T$  de cette intégrale, le premier terme sera d'ordre  $1/mT$ . Plus précisément, ce premier terme non nul du développement en puissances de  $m/T$  est

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Gamma_{\mu\nu}^{ARR}(\lambda, \hat{K}_1, \hat{K}_2) = \frac{mNe^2g}{8\pi mT} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{m}{T}\right)\right). \quad (5.31)$$

### 5.3.4 Photons de genre espace

Identifier la configuration qui conduit au résultat de PISARSKI est par contre un peu moins facile, car son calcul a été effectué au point d'énergie et impulsion nulles dans le formalisme à temps imaginaire. Il est par conséquent très malaisé de dire à quelle façon de prendre la limite d'impulsion nulle ce résultat correspond. Néanmoins, les considérations suivantes peuvent aider. Puisque dans le formalisme à temps imaginaire les énergies sont des quantités discrètes, la seule façon de "les faire tendre vers zéro" est de leur donner la valeur discrète zéro dès le début, avant même d'avoir commencé à toucher aux tri-impulsions. Dans le contexte du formalisme retardé-avancé, la procédure analogue consisterait à fixer d'abord les énergies des deux photons à la valeur zéro, et à considérer ensuite la limite de tri-impulsion nulle. Ceci correspond à des photons de genre espace.

Essayons donc la configuration suivante :  $k_{1,2}^0 = 0$  et  $\mathbf{k}_{1,2} \neq \mathbf{0}$ . Dans cette situation, les fonctions  $A$  et  $B$  deviennent également très simples

$$\begin{aligned} A(\hat{K}_1, \hat{K}_2) &= -3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{k}}_1)^4 (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{k}}_2)^4 (\mathbf{p} \cdot (\hat{\mathbf{k}}_1 + \hat{\mathbf{k}}_2))^4 \\ B(\hat{K}_1, \hat{K}_2) &= -(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{k}}_1)^2 (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{k}}_2)^2 (\mathbf{p} \cdot (\hat{\mathbf{k}}_1 + \hat{\mathbf{k}}_2))^2. \end{aligned} \quad (5.32)$$

En insérant ces fonctions dans la relation (5.22), on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Gamma_{\mu\nu}^{ARR}(\lambda, \hat{K}_1, \hat{K}_2) &= 4mNe^2g \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \\ &\times \left\{ \frac{3}{8} \frac{1 - 2n_F(\omega_{\mathbf{p}})}{\omega_{\mathbf{p}}^5} + \frac{3}{4} \frac{n'_F(\omega_{\mathbf{p}})}{\omega_{\mathbf{p}}^4} - \frac{1}{4} \frac{n''_F(\omega_{\mathbf{p}})}{\omega_{\mathbf{p}}^3} \right\}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Un mot s'impose à propos du prolongement analytique (5.14). Comme les fonctions  $A$  et  $B$  compensent exactement les dénominateurs de (5.22), ce prolongement n'introduit aucune partie imaginaire dans le résultat précédent qui reste inchangé.



Avant d'aller plus loin, on peut également se demander si l'on aurait pu utiliser les changements de variables  $P+K_2 \rightarrow P$  et  $P-K_1 \rightarrow P$  après l'équation (5.16). La réponse est non. En effet, la configuration que nous étudions ici est très particulière puisque  $k_1^o = k_2^o = 0$ , ce qui fait que les dénominateurs de l'équation (5.16) sont des combinaisons de  $2\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1^2$  et de  $2\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_2^2$ . Il en résulte que le développement de ces dénominateurs en puissances de  $\lambda$  engendre des puissances de  $\mathbf{k}_i^2/(\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_i)$ , qui sont singulières lorsque  $p \rightarrow 0$ . Par conséquent, ce développement fait apparaître des termes qui sont de plus en plus singuliers lorsque l'ordre du développement augmente. Certains des termes d'ordre  $\lambda^0$  qui nous intéressent se comportent comme  $dp/p^2$ , même si on garde  $m > 0$ . Ces singularités se compensent pour laisser un résultat fini, mais il n'est pas permis de faire des translations différentes sur des termes aussi singuliers, sous peine de modifier les termes finis restants ou même d'empêcher la compensation de ces singularités. On peut aussi voir que ces changements de variables ne sont pas autorisés en prenant le problème à l'envers : si ils étaient licites, ils donneraient un résultat sans dérivées de la fonction  $n_F$ . Essayons donc de faire subir à l'équation (5.33) une intégration par parties destinée à se débarrasser des termes en  $n'_F$  et  $n''_F$ . Cette manipulation donne le résultat suivant

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} p^2 dp \left\{ \frac{3}{4} \frac{1 - 2n_F(\omega_{\mathbf{p}})}{\omega_{\mathbf{p}}^5} + \frac{3}{2} \frac{n'_F(\omega_{\mathbf{p}})}{\omega_{\mathbf{p}}^4} - \frac{1}{2} \frac{n''_F(\omega_{\mathbf{p}})}{\omega_{\mathbf{p}}^3} \right\} \\ &= \frac{1 - 2n_F(m)}{4m^2} + \int_0^{+\infty} dp \frac{n_F(\omega_{\mathbf{p}}) - n_F(m)}{2p^2 \omega_{\mathbf{p}}} . \end{aligned} \quad (5.34)$$

On ne peut pas se débarrasser des termes en  $n_F(m)$  dans cette expression car ils en assurent la finitude. Or, si les changements de variables susmentionnés étaient permis, la dépendance dans la température serait contenue entièrement dans un facteur  $1 - 2n_F(\omega_{\mathbf{p}})$ .

Ce détail technique étant réglé, on peut passer à la suite. L'intégration angulaire est triviale et donne juste un facteur  $4\pi$ . L'intégration sur  $p$  ne peut pas être faite exactement avec  $m > 0$ , mais cette limitation est sans conséquence puisqu'on s'intéresse à la limite  $m/T \rightarrow 0$ . Cette fois ci, on peut sans dommage prendre  $m = 0$  dans l'intégrand, ce qui signifie que le premier terme non nul dans le développement en puissances de  $m/T$  pour cette intégrale est d'ordre  $1/T^2$ . Plus précisément, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Gamma_{\mu\nu}^{ARR}(\lambda, \hat{K}_1, \hat{K}_2) &= 4mNe^2 g \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta \int_0^{+\infty} \frac{dp}{(2\pi)^2} \\ &\times \left\{ \frac{3}{4} \frac{1 - 2n_F(p)}{p^3} + \frac{3}{2} \frac{n'_F(p)}{p^2} - \frac{1}{2} \frac{n''_F(p)}{p} \right\} \left( 1 + \mathcal{O}\left(\frac{m}{T}\right) \right) , \end{aligned} \quad (5.35)$$

après quoi on peut intégrer par parties pour faire disparaître les puissances de

$1/p$ ,<sup>11</sup> ce qui donne

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Gamma_{\mu\nu}^{ARR}(\lambda, \hat{K}_1, \hat{K}_2) &= -\frac{mNe^2g}{4\pi^2T^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta \\ &\times \int_0^{+\infty} dx \ln(x) \hat{n}_F'''(x) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{m}{T}\right)\right), \end{aligned} \quad (5.36)$$

où l'on note  $x \equiv p/T$  et  $\hat{n}_F(x) \equiv 1/(\exp(x) + 1)$ . On peut ensuite utiliser la relation

$$\hat{n}_F'''(x) = 6\hat{n}_F^4(x) - 12\hat{n}_F^3(x) + 7\hat{n}_F^2(x) - \hat{n}_F(x), \quad (5.37)$$

ainsi que les intégrales étudiées dans l'annexe B pour obtenir finalement

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Gamma_{\mu\nu}^{ARR}(\lambda, \hat{K}_1, \hat{K}_2) = \frac{7\zeta(3)mNe^2g}{16\pi^4T^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{m}{T}\right)\right), \quad (5.38)$$

qui n'est autre que la formule (5.12) obtenue par PISARSKI.

Cette étude confirme donc l'hypothèse selon laquelle les résultats de PISARSKI et ceux de GUPTA et NAYAK diffèrent seulement par les conditions cinématiques imposées aux photons, ce qui n'était pas évident a priori car le calcul de PISARSKI avait été effectué dans une situation très particulière du formalisme à temps imaginaire.

### 5.3.5 Résultat générique

Jusque là, j'ai étudié deux configurations cinématiques qui conduisent à des résultats extrêmement différents pour la limite d'impulsion nulle. En effet, l'une d'elles conduit à une amplitude de désintégration qui se comporte comme  $m/mT$  au voisinage du point de restauration de la symétrie chirale, alors que l'autre se comporte comme  $m/T^2$ . Il est donc légitime de se demander si l'un de ces comportements est générique alors que l'autre ne serait obtenu que pour un point exceptionnel. En vertu de la discussion faite plus haut à propos du changement de variables  $P + K_2 \rightarrow P$ ,  $P - K_1 \rightarrow P$ , on a de bonnes raisons de penser que la configuration qui conduit au résultat de PISARSKI est exceptionnelle.

Si l'on considère une troisième configuration qui correspond à la désintégration d'un pion au repos en deux photons virtuels au repos, étudiée dans l'article [71], on trouve encore un comportement en  $m/mT$ , avec toutefois un préfacteur numérique différent de celui obtenu dans l'équation (5.31). Ce résultat supporte donc l'idée selon laquelle le comportement en  $m/mT$  est générique.

Plus généralement, la différence entre ces deux comportements a pour origine une différence entre le comportement des intégrands dans la région infrarouge  $p \sim m \ll T$ . Le comportement infrarouge des divers termes peut être appréhendé simplement en annulant la masse  $m$  (formellement, on tronque

---

<sup>11</sup>Cette intégration par parties va dans le sens opposé de celle qui a été envisagée dans (5.34) puisque son effet est d'accroître l'ordre des dérivées de  $n_F$ .

l'intégrale en dessous de  $p \sim m$  si elle est divergente). Ainsi, l'examen du comportement des fonctions  $A$  et  $B$  lorsque  $p \rightarrow 0$  alors que  $m = 0$  permet d'extraire la singularité la plus forte dans la formule (5.22). De façon générique, on a

$$A(\hat{K}_1, \hat{K}_2) \sim p^{12}, \quad B(\hat{K}_1, \hat{K}_2) \sim p^6, \quad (5.39)$$

ce qui permet de dire que dans (5.22) le terme en  $1 - 2n_F$  donne  $m/mT$ , ainsi que le terme en  $n'_F$ , alors que le terme en  $n''_F$  donne  $m/T^2$ . Le résultat générique est donc de la forme

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Gamma_{\mu\nu}^{ARR}(\lambda, \hat{K}_1, \hat{K}_2) = 4mNe^2 g \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta \left( \frac{\alpha_0}{mT} + \frac{\alpha_1}{T^2} + \mathcal{O}\left(\frac{m}{T^3}\right) \right), \quad (5.40)$$

où les coefficients  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$  sont des fonctions compliquées de  $\hat{K}_{1,2}$ , *i.e.* de la configuration cinématique des lignes externes. La condition  $\alpha_0 = 0$  définit un sous-ensemble de mesure nulle parmi toutes les configurations possibles, ce qui signifie que le comportement en  $m/T^2$  est exceptionnel, comme annoncé.

## 5.4 Boucles dures et désintégration du pion

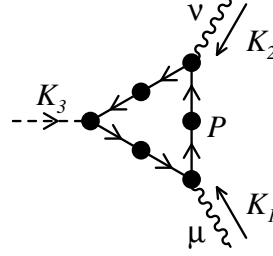
### 5.4.1 Introduction

D'après ce qui précède, l'amplitude de désintégration du pion se comporte comme  $m/mT$  lorsque  $m/T \rightarrow 0$ , et non pas comme  $m/T^2$  qui semble n'être atteint qu'en un point exceptionnel qui ne correspond pas à des photons physiques. Par conséquent, la conclusion de PISARSKI qui prédisait l'annulation de cette amplitude de désintégration lorsque la symétrie chirale est restaurée semble a priori devoir être remplacée par l'assertion suivante : l'amplitude de désintégration du pion en deux photons tend vers une limite finie lorsque  $f_\pi$  tend vers zéro.

Néanmoins, ceci n'est pas tout à fait la fin de l'histoire. En effet, le facteur  $m$  au dénominateur de (5.31) est dû à une divergence infrarouge en  $dp/p^2$ , régularisée par cette masse. Cela signifie que l'intégrale sur  $p$  est dominée par les valeurs de  $p$  qui sont d'ordre  $m$ . Or, ce paramètre  $m$  tend vers zéro lorsqu'on se rapproche du point de restauration de la symétrie chirale, ce qui nous dit que l'intégrale en question est sensible à des valeurs de plus en plus molles de l'impulsion qui circule dans la boucle.

On verra dans le chapitre 7 que certaines corrections à une boucle apportent des corrections essentielles lorsque l'impulsion portée par un propagateur est d'ordre  $gT$  où  $g$  est la constante de couplage. Ces corrections sont appelées "boucles dures" [74, 75, 76]. La sommation de ces boucles dures devient impérative sur tout propagateur transportant une impulsion molle. Compte tenu de ce qui précède, avant d'atteindre le point de restauration de la symétrie chirale, il va exister une température pour laquelle  $m \sim gT$  et au dessus de laquelle  $gT > m$ . Cela signifie qu'au delà de cette température, la masse thermique  $gT$  va prendre le relais de  $m$  en tant que régulateur infrarouge, et que le triangle que l'on doit considérer est plutôt celui qui est donné par la figure 5.4. C'est à

FIG. 5.4 – Corrections apportées par les boucles dures au diagramme triangulaire. Les points noirs désignent les vertex et propagateurs effectifs issus de la prise en compte des boucles dures.



l'étude sommaire de l'effet des boucles dures sur la désintégration du pion que je vais consacrer les deux paragraphes suivants.

#### 5.4.2 Boucles dures dans le modèle $\sigma$ linéaire

Le modèle des quarks constituants que nous considérons dans ce chapitre contient deux constantes de couplages distinctes  $e$  et  $g$ . Cependant, comme  $e$  vient du couplage électromagnétique des quarks alors que  $g$  est due à l'interaction forte, on a vraisemblablement  $e \ll g$ . Par conséquent, l'échelle molle à laquelle on va être confronté en premier est l'échelle  $gT$ .

Je ne considérerai donc que les boucles dures qui font intervenir les champs  $\sigma$  et  $\pi$ , qui sont représentées sur la figure 5.5. Si l'on revient au Lagrangien

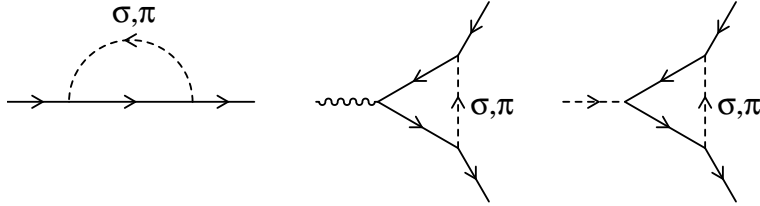


FIG. 5.5 – Liste des topologies susceptibles d'avoir une boucle dure à l'échelle  $gT$ .

de l'équation (5.8), on voit que le couplage du  $\sigma$  aux quarks est  $-ig$ , et que le couplage du  $\pi$  aux quarks est  $g\gamma^5$ . En outre, on peut négliger la masse  $m$  dans le calcul de ces boucles dures puisque  $m \ll gT$  lorsqu'on s'approche de la température critique. Les self-énergies retardées, à l'approximation des boucles dures, reçoivent les contributions suivantes des boucles impliquant respectivement le  $\sigma$  et le  $\pi$  :

$$-i\hat{\Sigma}_{RA}(P)_{|\sigma} = -ig^2 \int \frac{d^3\mathbf{l}}{(2\pi)^3} \frac{[n_B(l) + n_F(l)]}{2l P \cdot \hat{L}} \hat{L}$$

$$-i\Sigma_{RA}(P)|_{\pi} = +ig^2 \int \frac{d^3\mathbf{l}}{(2\pi)^3} \frac{[n_B(l) + n_F(l)]}{2l \cdot \hat{L}} \gamma^5 \hat{L} \gamma^5, \quad (5.41)$$

où je note  $\hat{L} \equiv (1, \hat{l})$ . Les matrices d'isospin n'ont pas été écrites explicitement dans ce qui précède, puisque les fonctions précédentes sont proportionnelles à l'identité dans l'espace d'isospin. On peut noter que la somme de ces deux contributions est égale au résultat standard en QED pour la contribution de boucle dure à la self-énergie de l'électron, à condition toutefois de remplacer  $e^2$  par  $g^2$  (voir le chapitre 7). Par conséquent, on connaît déjà la modification que la sommation de cette self-énergie va entraîner sur le propagateur du quark, qui est d'introduire une borne inférieure à l'échelle  $gT$  dans l'intégrale associée aux boucles qui impliquent ces propagateurs effectifs.

On peut également donner les contributions des boucles dures au vertex  $\gamma q\bar{q}$ , qui sont

$$\Gamma_{ARR}^{\gamma q\bar{q}}(Q, P, -P - Q)|_{\sigma}^{\mu} = -ieg^2 \int \frac{d^3\mathbf{l}}{(2\pi)^3} \frac{[n_B(l) + n_F(l)]}{4l \cdot \hat{L} \cdot R \cdot \hat{L}} \hat{L} \gamma^{\mu} \hat{L} \quad (5.42)$$

pour la boucle contenant le  $\sigma$  et

$$\Gamma_{ARR}^{\gamma q\bar{q}}(Q, P, -P - Q)|_{\pi}^{\mu} = ieg^2 \int \frac{d^3\mathbf{l}}{(2\pi)^3} \frac{[n_B(l) + n_F(l)]}{4l \cdot \hat{L} \cdot R \cdot \hat{L}} \gamma^5 \hat{L} \gamma^{\mu} \hat{L} \gamma^5 \quad (5.43)$$

pour celle qui fait intervenir les pions. Dans les deux équations précédentes,  $R$  désigne  $P + Q$ . Si on les additionne, on obtient un résultat semblable au résultat pour le vertex  $\gamma e\bar{e}$  en QED, moyennant le remplacement de deux facteurs  $e$  par deux puissances de  $g$ . D'une façon similaire, on peut obtenir les contributions de boucle dure au vertex  $\pi^0 q\bar{q}$ . En fait, il suffit de reprendre les équations (5.42) et (5.43), et d'y remplacer le dernier facteur  $e$  par  $g$ , et la matrice  $\gamma^{\mu}$  par  $i\gamma^5$ . Toutefois, comme  $\gamma^5$  anti-commute avec les matrices de DIRAC, on voit que le produit des matrices qui sont sous l'intégrale sera toujours proportionnel à  $\hat{L}\hat{L} = L^2 = 0$ . Le vertex  $\pi^0 q\bar{q}$  ne reçoit donc pas de contribution de boucle dure à l'ordre  $gT$ . Il en reçoit probablement une à l'ordre  $eT$ , mais elle ne nous intéresse pas ici.

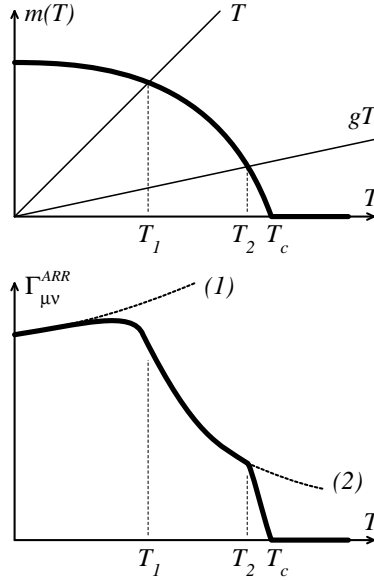
### 5.4.3 Effet des boucles dures sur $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

Si on suppose que la transition de phase au cours de laquelle la symétrie chirale est restaurée est du second ordre, on s'attend à ce que la valeur moyenne dans le vide du champ  $\sigma$ , responsable de la masse  $m$ , s'annule comme une puissance de  $T - T_c$  à la température critique  $T_c$ . Parallèlement, la constante de couplage  $g$  ne va vraisemblablement dépendre de la température que logarithmiquement. Par conséquent, la sommation des boucles dures calculées dans le paragraphe précédent va engendrer une masse thermique  $m_T \sim gT$ , que l'on va pouvoir considérer comme constante au voisinage du point critique ( $\lim_{T \rightarrow T_c} m_T \sim gT_c$ ), alors que la masse  $m$  dépend fortement de la température, et s'annule au point critique.

Suffisamment près du point critique, on aura  $m \ll m_T$ , et c'est donc  $m_T$  qui sera le régulateur infrarouge le plus pertinent. La puissance de  $m$  qui apparaît au dénominateur de (5.31) est donc remplacée par  $m_T$  puisqu'elle était d'origine infrarouge. Il reste maintenant à voir si la sommation des boucles dures affecte la masse  $m$  qui est au numérateur. A cet effet, il faut remarquer que cette masse au numérateur vient de ce que la masse  $m$  des quarks constitutants brise la symétrie chirale, ce qui rend non nulle la trace de DIRAC contenant une matrice  $\gamma^5$ . Or, une propriété remarquable des boucles dures et des masses thermiques qu'elles engendrent est qu'elles ne brisent pas la symétrie chirale. En d'autres termes, si l'on part d'un propagateur de quark qui commute avec  $\gamma^5$ , le propagateur obtenu après sommation des boucles dures commute encore avec  $\gamma^5$ . Il en résulte ici qu'après sommation des boucles dures,  $m$  reste le seul terme de masse qui brise la symétrie chirale. Par conséquent, la trace de DIRAC qui apparaît au numérateur reste proportionnelle à  $m$ , même après la correction apportée par les boucles dures. Près du point critique, on doit donc s'attendre à ce que l'amplitude de désintégration du pion en deux photons se comporte comme  $m/m_T T$ , et s'annule donc au point critique.

L'évolution de l'amplitude de désintégration du pion avec la température à laquelle on peut donc s'attendre est résumée sur la figure 5.6. Sur cette figure, la

FIG. 5.6 – Evolution de la masse des quarks constitutants (figure du haut) et de l'amplitude de désintégration  $\pi^0 \gamma \gamma$  avec la température. La courbe (1) est ce que l'on obtiendrait en extrapolant le résultat obtenu à  $T = 0$  avec la masse  $m$  dépendant de la température. La courbe (2) est le résultat obtenu par Gupta et Nayak, sans tenir compte des modifications apportées par les boucles dures.



courbe du haut montre l'évolution plausible de la masse  $m = m(T)$  des quarks constitutants lorsqu'on s'approche de la température critique  $T_c$ . On voit qu'on peut définir deux autres températures caractéristiques  $T_1$  et  $T_2$ , définies par les relations  $m(T_1) = T_1$  et  $m(T_2) = gT_2$ .  $T_1$  est la température pour laquelle la

masse  $m(T)$  devient plus petite que la température ; c'est donc la température au delà de laquelle les effets thermiques deviennent dominants.  $T_2$  est quant à elle la température pour laquelle la masse  $m(T)$  devient plus petite que l'échelle de masse thermique  $gT$  (j'ai supposé  $g < 1$ ) ; au delà de cette température, la masse thermique  $m_T$  joue le rôle dominant en tant que régulateur infrarouge.

A partir de là, on peut donner grossièrement l'allure de l'évolution de l'amplitude de désintégration du pion en deux photons. Pour  $T \in [0, T_1]$ , les effets thermiques sont faibles, et l'amplitude se comporte en  $1/m$  comme à  $T = 0$ . Pour  $T \in [T_1, T_2]$ , les effets thermiques sont importants, mais on peut encore négliger l'effet des boucles dures dans le triangle ; l'amplitude se comporte donc comme  $1/T$ . Enfin, lorsque  $T$  est dans la petite gamme de températures entre  $T_2$  et  $T_c$ , les corrections dues aux boucles dures deviennent essentielles, et l'amplitude se comporte comme  $m/m_T T$ . En particulier, elle s'annule suivant la même loi de puissance que la masse  $m$ . On retrouve donc le résultat annoncé par PISARSKI, bien que ce soit ici pour des raisons complètement différentes.

## 5.5 Anomalies et désintégration du pion

Le travail [69, 70] de PISARSKI a été le point de départ d'une étude sur les connexions entre la désintégration du pion et les anomalies à température finie, qui a donné lieu aux articles [77, 78, 79, 80] par PISARSKI, TYTGAT et TRUEMAN. Le but de ce travail était d'expliquer le problème suivant : le coefficient de l'anomalie axiale est d'origine ultraviolette et ne dépend donc pas de la température, l'amplitude de désintégration du pion dépend quant à elle de la température ; par conséquent, que devient la relation qui les liait à température nulle, et pourquoi cette dernière cesse-t-elle d'être valide ? La conclusion à laquelle ils ont abouti est que cette relation est brisée car sa justification dépend de l'invariance de LORENTZ de la théorie. Plus précisément, le fait que l'introduction de la quadri-vitesse  $U_\mu$  soit nécessaire pour rendre covariante la théorie des champs à température finie permet de construire un plus grand nombre de tenseurs linéairement indépendants pouvant intervenir dans l'amplitude de désintégration du pion.

Au voisinage du point de restauration de la symétrie chirale, BAIER, DIRKS et KOBER ont proposé dans l'article [81] de partir de la fonctionnelle de WESS-ZUMINO-WITTEN [82, 83] afin d'en extraire le couplage effectif du pion à deux photons, qui doit redonner l'amplitude de désintégration  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ . Leur calcul semble en accord avec les résultats de PISARSKI obtenus dans [70], et ne reproduit donc ce couplage que dans l'une des limites possibles. La question est donc de savoir si cela est une particularité de cette fonctionnelle à température finie, qu'il conviendrait alors d'expliquer, ou bien s'il s'agit d'un artéfact lié aux techniques de calcul employées dans [81]. Cette dernière possibilité n'est pas à exclure dans la mesure où une étape cruciale de la méthode employée par BAIER, DIRKS et KOBER fait appel au calcul de fonctions du formalisme à temps imaginaire au point d'énergie-impulsion nulle. Il semble donc tout à fait possible que, comme dans le calcul de PISARSKI, le choix d'utiliser le forma-

lisme à temps imaginaire sélectionne l'une des nombreuses limites possibles. Il conviendrait donc à cet effet de reproduire le calcul de [81] en s'affranchissant de cette étape intermédiaire qui fait appel au formalisme à temps imaginaire, afin de tester laquelle des deux hypothèses précédentes est la bonne.



# Conclusions

C'est en est donc fini de cette partie réservée aux aspects formels de la théorie des champs à température finie. Des trois études présentées dans cette partie, les deux premières peuvent être considérées comme closes puisqu'il s'agissait de comprendre un point formel bien précis ou bien de mettre sur pied un outil destiné à être utilisé par la suite comme les règles de coupure du formalisme retardé-avancé. Par contre, le travail présenté dans le dernier chapitre soulève plus de problèmes qu'il n'en résout, puisque la connexion entre les modèles phénoménologiques comme le modèle  $\sigma$  et les approches plus formelles comme celle qui est basée sur la fonctionnelle de WESS-ZUMINO-WITTEN semble beaucoup plus complexe à température finie. Cette question mérite certainement qu'on s'y intéresse plus longuement.

Parmi les autres problèmes importants dans le domaine du formalisme, un problème de taille est celui des extensions hors d'équilibre de la théorie des champs à température finie. Cette question est importante du point de vue phénoménologique, car l'équilibre statistique est une situation idéale qui a peu de chances d'être atteinte dans les expériences de collisions de noyaux lourds. En particulier, il conviendrait de déterminer assez précisément la nature des problèmes que l'on peut espérer résoudre à l'aide de la théorie des champs, et quels sont ceux qui au contraire requièrent que l'on utilise les outils de la théorie cinétique ou de l'hydrodynamique.



Deuxième partie

**Production de photons**



# Introduction

**A**près une première partie dédiée à des aspects formels de la théorie des champs à température finie, je vais exposer maintenant l'une de ses possibles applications. Il s'agit du calcul du taux de production de photons et de paires de leptons (*i.e.* de photons virtuels se désintégrant ultérieurement en deux leptons) par un plasma de quarks et de gluons, *i.e.* le calcul du nombre de photons émis par unité de temps et de volume par un tel plasma. On peut également calculer un taux différentiel par unité de fréquence, ce qui permet de donner le spectre d'émission du plasma.

D'un point de vue expérimental, cette quantité peut être mesurée dans les expériences de collisions de noyaux lourds. Il est donc intéressant d'avoir des prédictions concernant ce taux de production par un plasma de quarks et de gluons aussi bien que par un gaz hadronique chaud, dans le but de tenter de différencier ces deux phases par cette observable.

Cette partie sera dominée par des problèmes totalement différents de ceux qui ont été abordés dans la première partie. Les plus importants seront reliés aux divergences infrarouges et colinéaires que l'on rencontre dans les calculs impliquant des particules de masse nulle. En effet, pour ce qui est des divergences infrarouges, les résultats de LEE et NAUENBERG [84] et leur traduction par KINOSHITA dans le langage de la théorie des champs [85] n'ont pas pu être généralisés à la théorie des champs à température finie, pour laquelle seuls des résultats partiels existent. De ce point de vue, le calcul du taux de production de photons sera aussi un prétexte pour s'intéresser à ces singularités. En effet, cette quantité est à l'évidence observable et les divergences infrarouges et colinéaires devraient s'y compenser si l'on croit que le résultat de LEE et NAUENBERG s'étend à la théorie des champs à température finie. Outre les motivations phénoménologiques pour le calcul de cette quantité, on peut également voir ce calcul comme un test de notre compréhension des secteurs infrarouge et colinéaire.

Cette partie sera divisée de la façon suivante. Elle commencera par un chapitre faisant le point sur le lien entre les quantités observables et les fonctions de GREEN que l'on peut calculer à l'aide de la théorie des champs à température finie. L'accent sera mis sur le lien entre le taux de production de photons et les fonctions de GREEN, qui est à la base des calculs effectués dans les chapitres ultérieurs.

Le deuxième chapitre de cette partie exposera un travail de BRAATEN et

PISARSKI qui joue un rôle fondamental dans les calculs perturbatifs en théorie des champs à température finie. Sommairement, il s'agit d'une réorganisation de la série perturbative basée sur le fait que certains diagrammes à une boucle, connus sous le nom de boucles dures, peuvent être du même ordre de grandeur que leur contrepartie de la théorie nue. Cette réorganisation permet en principe de regrouper dans les diagrammes d'ordre le plus bas (du point de vue du nombre de boucles) toutes les contributions dominantes à une fonction donnée. Quelques limitations de cette procédure sont discutées en fin de chapitre.

Le chapitre suivant présente le calcul du taux de production de photons virtuels émis au repos dans le référentiel du plasma. Ici, les seuls problèmes possibles sont de nature infrarouge puisque de tels photons ont une masse invariante qui permet de s'affranchir des divergences colinéaires. Ce calcul permettra cependant de mettre en évidence un cas générique où la sommation proposée par BRAATEN et PISARSKI est insuffisante, et ne dispense pas de considérer des topologies d'ordre supérieur.

Le quatrième chapitre de cette partie exposera le calcul du taux de production de photons réels. Nous verrons que des divergences colinéaires extrêmement fortes apparaissent dans certaines topologies à deux boucles contenant des processus comme le bremsstrahlung. Bien que ces divergences soient écrantées de façon assez naturelle dans le cadre du formalisme de BRAATEN et PISARSKI [74, 75], elles engendrent des puissances de l'inverse de la constante de couplage et peuvent donc bouleverser la hiérarchie naturelle du développement perturbatif.

Finalement, je terminerai par un petit chapitre de prospective présentant quelques remarques concernant ce que l'on peut attendre des ordres supérieurs pour le calcul de la production de photons.

## Chapitre 6

# Observables

Hi-Han, le vieux bourriquet gris, tout seul dans un coin de bois plein de chardons, pensait aux Choses Sérieuses. “Pourquoi ?” pensait-il tristement. Et parfois : “Pour quelle raison ?”. Et même : “Que faut-il en conclure ?”

ALAN ALEXANDER MILNE  
*Winnie l’ourson*

**D**ans ce chapitre, je vais établir la connexion entre le taux de production de photons auquel je m’intéresserai dans les chapitres suivants, et les fonctions de Green qu’on peut calculer en théorie des champs à température finie.

Je vais commencer par rappeler quelles sont les quantités qu’on peut espérer mesurer expérimentalement concernant un plasma de quarks et de gluons. Ensuite, je justifierai la formule qui donne le taux de production de photons en fonction de la partie imaginaire du tenseur de polarisation du photon. Cette justification sera basée sur les règles de coupure du formalisme retardé-avancé.

### 6.1 Observables dans un plasma

#### 6.1.1 Remarques générales

Avant d’aller plus loin, quelques mots s’imposent sur le problème des états asymptotiques (on pourra voir [86, 87]) en théorie des champs à température finie. Le problème des états asymptotiques vient de ce que les excitations du plasma ont une durée de vie finie, et par conséquent il ne semble en principe pas légitime d’utiliser les formules de réduction usuelles, puisque ces dernières

font appel à des états stables de particules libres à  $t = \pm\infty$  (si on suppose que l'interaction a lieu à  $t = 0$ ).

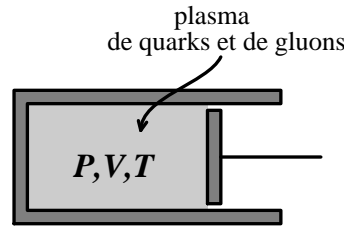
Il y a en fait deux problèmes. Le premier concerne la stabilité des excitations qui vivent dans le plasma. Ce problème ne devrait pas être insurmontable. En effet, une telle situation où les champs fondamentaux de la théorie ne correspondent pas à des particules stables<sup>1</sup> a déjà été rencontrée en QCD à température nulle avec les quarks et les gluons. On sait bien que les quarks et les gluons ne sont pas observables à l'état libre, mais on peut tout de même écrire les sections efficaces entre objets observables (jets, hadrons) en termes des sections efficaces élémentaires faisant intervenir seulement des quarks et des gluons.

L'autre problème est relié au fait qu'une particule dans un plasma peut difficilement être considérée comme libre "avant et après la collision", puisqu'elle se trouve immergée dans un milieu dense. Cependant, dans la limite où la constante de couplage est supposée petite, le libre parcours moyen (*i.e.* la distance moyenne parcourue entre deux interactions) est grand, ce qui rend raisonnable l'image de particules libres presque tout le temps sauf pendant la durée très brève où elles interagissent. Il est alors vraisemblablement légitime d'utiliser les formules de réduction usuelles pour relier les fonctions de Green à des sections efficaces. Naturellement, ces sections efficaces ne sont pas directement mesurables car on ne peut pas suivre à la trace les particules plongées dans un plasma. Toutefois, elles peuvent être reliées au moyen de la théorie cinétique à des propriétés macroscopiques du plasma comme la viscosité par exemple.

### 6.1.2 Propriétés thermodynamiques

Il existe cependant d'autres propriétés d'un plasma qui peuvent être calculées sans se heurter aux problèmes que je viens d'évoquer. Il s'agit des propriétés

FIG. 6.1 — Mesure des propriétés thermodynamiques d'un plasma de quarks et de gluons.



thermodynamiques qui s'obtiennent à partir de la fonction de partition, ou ce

<sup>1</sup>Dans ce contexte, si on prenait les hypothèses qui servent à justifier les formules de réduction au pied de la lettre, il faudrait construire des sections efficaces entre les très rares particules qui sont stables, comme le proton dans le modèle standard. En fait, une approche plus pragmatique consiste à comparer la durée de vie d'une particule avec la durée typique de la réaction. Si la réaction est suffisamment rapide, alors la particule peut être considérée comme stable dans ce contexte.



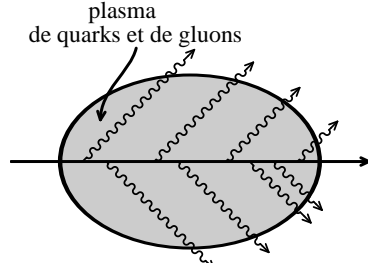
qui revient au même à partir de l'énergie libre. Expérimentalement, en supposant que l'on dispose d'un échantillon suffisant de plasma, on peut envisager de mesurer la pression en fonction du volume et de la température, ce qui donnerait des informations sur l'équation d'état  $f(P, V, T) = 0$  du plasma. D'un point de vue théorique, le calcul de la fonction de partition se ramène au calcul des diagrammes du vide (*i.e.* sans lignes externes). Ce calcul a été conduit récemment par BRAATEN et NIETO jusqu'à l'ordre  $g^5$ , où  $g$  est la constante de couplage de QCD, dans les articles [88, 89]. Dans le même ordre d'idées, DRUMMOND, HORGAN, LANDSHOFF et REBHAN ont proposé une technique non perturbative qui permet de calculer la pression d'une façon qui la rend manifestement finie dans l'infrarouge [90].

### 6.1.3 Diffusion d'une particule externe

Une autre catégorie d'expérience que l'on peut imaginer pour tester les propriétés d'un plasma consiste à regarder la diffusion de particules sur un échantillon de plasma,<sup>2</sup> ce dernier faisant office de cible. On peut alors mesurer la

---

FIG. 6.2 – Diffusion d'une particule externe par un échantillon de plasma, avec émission de photons.




---

perte d'énergie des particules incidentes, ou encore l'émission de photons induite par les diffusions sur les particules du plasma si on utilise des particules test chargées. Ici encore, on évite les complications liées aux formules de réduction à température finie, puisque les seules particules que l'on observe sont les particules incidentes et les particules qui s'échappent du plasma, que l'on peut alors considérer comme stables et libres. On pourra trouver la connexion générale entre ces amplitudes de transition et les fonctions de Green thermiques dans les articles [91, 65]. Jusqu'à présent, ce type d'observables n'a pas été calculé en théorie des champs à température finie, mais plutôt par des méthodes semi-classiques. On pourra voir à ce sujet les références [92, 93, 94, 95, 96, 97].

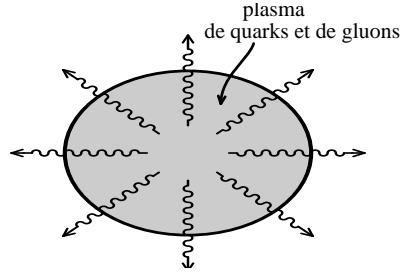
---

<sup>2</sup>Ce type d'expérience est utilisé couramment pour l'étude des solides, où l'on procède à la diffusion de neutrons sur un échantillon du matériau à étudier.

### 6.1.4 Production de particules

On peut enfin envisager aussi une expérience purement passive qui consisterait à entourer un échantillon de plasma de détecteurs afin de mesurer le flux et le spectre de particules émises par le plasma. Cette émission de particules en-

FIG. 6.3 – Emission de photons par un plasma de quarks et de gluons.

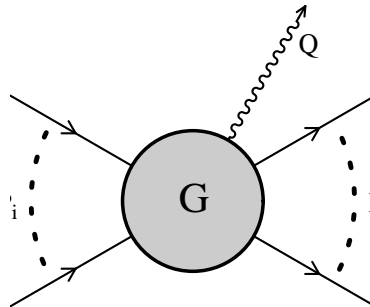


traînant un refroidissement du plasma, ce dernier ne sera donc pas strictement en équilibre thermodynamique. Néanmoins, si l'échantillon de plasma est suffisamment important, on peut supposer que le taux de refroidissement dû à cet effet est faible. Le calcul pourra donc être effectué en supposant que le plasma est à l'équilibre. D'un point de vue théorique, le nombre de particules émises par unité de temps et par unité de volume du plasma peut être relié simplement à la partie imaginaire d'une fonction à deux points. Comme c'est la production de photons par un plasma qui nous occupera par la suite, je vais donner quelques détails à propos de la justification de cette relation dans la section suivante.

## 6.2 Calcul d'un taux de production

### 6.2.1 Approche élémentaire

FIG. 6.4 – Processus générique de production d'un photon dans un plasma.



D'un point de vue microscopique, la production de photons par un plasma peut être vue de la façon suivante : un certain nombre de partons issus du plasma interagissent pour donner un photon accompagné d'autres partons. Seul le photon est observé et est supposé s'échapper du plasma, de sorte que les partons produits lors de la réaction sont réabsorbés par le plasma.

En pratique, cela signifie que l'on calcule une quantité qui ne dépend que de l'impulsion du photon. Les impulsions des autres particules participant à la réaction, ainsi que des autres particules produites, sont accompagnés d'un poids statistique approprié, et intégrées sur tout le domaine autorisé par la cinématique du processus envisagé. D'un point de vue un peu plus formel, la contribution de ce processus au taux de production de photons peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} & \int_i \prod_{\text{entrant}} \frac{d^4 P_i}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(P_i^2 - M_i^2) \theta(p_i^o) n_{B,F}(p_i^o) \\ & \times \int_j \prod_{\text{sortant}} \frac{d^4 P_j}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(P_j^2 - M_j^2) \theta(p_j^o) (1 \pm n_{B,F}(p_j^o)) \\ & \times |G(\{P_i\}; \{P_j\}; Q)|^2 (2\pi)^4 \delta\left(\sum_i P_i - \sum_j P_j - Q\right), \end{aligned} \quad (6.1)$$

avec les notations de la figure 6.4. Cette quantité n'est autre que le nombre de photons émis par unité de temps et par unité de volume, dans une région infinitésimale de l'espace des phases du photon. En d'autres termes, si on l'intègre avec la mesure  $d^3\mathbf{p}/(2\pi)^3 2p_o$ , on obtient le nombre total de photons réels émis par unité de temps et de volume.

Une remarque s'impose ici : cette formule suppose que le photon s'échappe du plasma sans réinteraction une fois émis. Cela n'est une hypothèse raisonnable que si le photon possède un libre parcours moyen grand devant l'épaisseur de plasma qu'il lui faut traverser pour s'échapper.<sup>3</sup> Du point de vue du développement perturbatif, cela signifie que cette formule n'est vraie qu'au premier ordre dans la constante de couplage de QED. Par contre, elle est a priori vraie à tous les ordres dans la constante de couplage de l'interaction forte. Cette limitation n'est pas très importante en pratique dans la mesure où la constante de couplage électromagnétique est très petite comparée à la constante de couplage forte :  $\alpha \ll \alpha_s$ .

Une procédure pour calculer le taux de production de photons pourrait donc être de faire la liste de tous les processus susceptibles d'y contribuer, de calculer ensuite le module au carré de la somme des amplitudes correspondantes, et d'intégrer cette dernière sur les impulsions de toutes les particules inobservées de façon à ne laisser que la dépendance vis à vis de l'impulsion du photon. Il existe néanmoins une méthode plus rapide qui présente l'avantage de regrouper

---

<sup>3</sup>Si on calculait le taux de production de photons par un corps de grandes dimensions comme une étoile, cela signifie que cette formule donnerait correctement le taux de production d'une couche située à la périphérie et d'épaisseur comparable au libre parcours moyen des photons.

automatiquement tous les processus contribuant à un ordre donné, et qui requiert seulement de calculer la partie imaginaire du tenseur de polarisation du photon.

## 6.2.2 Formule de Weldon

WELDON dans [59], suivi plus tard par GALE et KAPUSTA [98], a proposé la formule suivante

$$\frac{dN}{dt d^3\mathbf{x}} = -\frac{dq_o d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^4} 2n_B(q_o) \text{Im} \Pi^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) , \quad (6.2)$$

pour le nombre de photons émis par unité de temps et de volume. En d'autres termes, il suffit seulement de connaître la partie imaginaire du tenseur de polarisation retardé du photon. Je vais en donner dans cette section une justification basée sur le formalisme retardé-avancé et sur les règles de coupure justifiées pour ce formalisme dans le chapitre 4.

A cet effet, partons du second membre de l'équation 6.2. On peut tout d'abord écrire<sup>4</sup>

$$A \equiv -2n_B(q_o) \text{Im} \Pi^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) = -2n_B(q_o) \epsilon^{\mu}(Q) \epsilon^{*\nu}(Q) \text{Im} \Pi^{AR}_{\mu\nu}(q_o, \mathbf{q}) , \quad (6.3)$$

où  $\epsilon^{\mu}(Q)$  est le vecteur polarisation du photon d'impulsion  $Q$ . Si on utilise ensuite la formule (4.34), cette quantité va devenir<sup>5</sup>

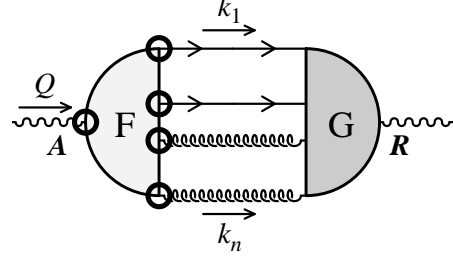
$$\begin{aligned} A &= -n_B(q_o) \epsilon^{\mu}(Q) \epsilon^{*\nu}(Q) \\ &\times \sum_{\text{coupures}} F_{\mu, \{\mu_j\}}^{AR \cdots R}(Q, -K_1, \cdots, -K_n) \Big|_{\text{souligné}} G_{\nu, \{\nu_j\}}^{RA \cdots A}(-Q, K_1, \cdots, K_n) \\ &\times \prod_{\text{quarks } i} 2\pi \epsilon(k_i^o) \delta(K_i^2 - M_i^2) (K_i + M_i) \prod_{\text{gluons } j} 2\pi \epsilon(k_j^o) \delta(K_j^2) (-P^{\mu_j \nu_j}) , \end{aligned} \quad (6.4)$$

où j'ai utilisé les notations de la figure 6.5. Cette expression n'est qu'une façon un peu plus explicite d'écrire les règles de coupure du formalisme retardé-avancé. La partie imaginaire d'une fonction retardée ou avancée est une somme sur les coupures au travers du diagramme, chaque coupure divise le diagramme en deux amplitudes dont l'une est de type  $AR \cdots R$  et ne contient que des vertex soulignés (cerclés sur la figure), alors que l'autre amplitude est de type  $RA \cdots A$ .

<sup>4</sup>Dans cette relation, une sommation sur les états de polarisation du photon, non écrits explicitement, est sous-entendue. Il en sera de même un peu plus tard avec les spineurs. Si on somme sur tous les états de polarisation, on risque d'inclure des photons non physiques. Toutefois, l'invariance de jauge implique que les photons réels produits sont tous transverses.

<sup>5</sup>Les considérations qui suivent sont juste destinées à donner une idée de la connexion entre la formule (6.2) et l'approche plus intuitive de la section précédente. Cette justification n'est cependant pas très rigoureuse dans la mesure où certains signes (globaux) relatifs aux fermions sont peu aisés à écrire de façon générale. Je n'en ai donc pas tenu compte. Les écrire correctement requiert de connaître plus précisément la topologie du diagramme considéré afin par exemple de savoir combien de boucles de fermions on coupe.

FIG. 6.5 – Coupure dans le tenseur de polarisation du photon.



On a par ailleurs écrit explicitement les propagateurs coupés qui se trouvent le long de la coupure, où les  $\mu_j, \nu_j$  sont les indices de LORENTZ portés par les gluons, et les  $P^{\mu_j \nu_j}$  sont les projecteurs associés aux propagateurs des gluons.<sup>6</sup>

On peut ensuite transformer cette quantité en utilisant quelques propriétés des fonctions retardées-avancées

$$F_{\mu, \{\mu_j\}}^{AR \cdots R}(Q, -K_1, \cdots, -K_n) \Big|_{\text{souligné}} = F_{\mu, \{\mu_j\}}^{AR \cdots R}(-Q, K_1, \cdots, K_n), \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} G_{\nu, \{\nu_j\}}^{RA \cdots A}(-Q, K_1, \cdots, K_n) &= \\ &= \frac{\prod_i n_F(k_i^o) \prod_j n_B(k_j^o)}{n_B(q_o)} \left[ G_{\nu, \{\nu_j\}}^{AR \cdots R}(-Q, K_1, \cdots, K_n) \right]^*, \end{aligned} \quad (6.6)$$

ainsi que les relations

$$\begin{aligned} \not{K}_i + M_i &= u(\mathbf{k}_i) \bar{u}(\mathbf{k}_i) \\ -P^{\mu_j \nu_j} &= \epsilon^{\mu_j}(K_j) \epsilon^{*\nu_j}(K_j), \end{aligned} \quad (6.7)$$

ce qui donne finalement

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\text{coupures quarks } i} \prod 2\pi\delta(K_i^2 - M_i^2) \epsilon(k_i^o) n_F(k_i^o) \prod_{\text{gluons } j} 2\pi\delta(K_j^2) \epsilon(k_j^o) n_B(k_j^o) \\ &\times \left[ F_{\mu, \{\mu_j\}}^{AR \cdots R}(-Q, K_1, \cdots, K_n) \right] \epsilon^\mu(Q) \prod_{\text{gluons } j} \epsilon^{\mu_j}(K_j) \prod_{\text{quarks } i} u(\mathbf{k}_i) \\ &\times \left[ G_{\nu, \{\nu_j\}}^{AR \cdots R}(-Q, K_1, \cdots, K_n) \right]^* \epsilon^{*\nu}(Q) \prod_{\text{gluons } j} \epsilon^{*\nu_j}(K_j) \prod_{\text{quarks } i} \bar{u}(\mathbf{k}_i). \end{aligned} \quad (6.8)$$

<sup>6</sup>Je n'ai écrit que des quarks et des gluons le long de cette coupure. Toutefois, il peut a priori y avoir aussi des fantômes de FADEEV-POPOV (dans les jauges covariantes par exemple), dont le rôle est de compenser les degrés de liberté non physiques des gluons afin de préserver l'unitarité de la théorie. Dans l'expression finale, on doit n'avoir que des amplitudes ayant des degrés de liberté physiques sur leurs lignes externes, en accord avec l'expression perturbative de l'unitarité. Pour une discussion plus détaillée de cette question, on pourra voir [3] ou [2]. Alternativement, on peut choisir de travailler dans une jauge "physique" où il n'y a pas de fantômes.

Dans cette relation, j'ai été un peu cavalier avec les spineurs. En effet, j'ai supposé que toutes les lignes fermioniques allaient de la gauche vers la droite, ce qui n'est bien sûr pas nécessairement le cas. Si une ligne fermionique va dans le sens opposé (*i.e.* si c'est un antifermion qui va de la gauche vers la droite), l'opérateur qui est associé à cette ligne sera  $\bar{K}_i - M_i = v(\mathbf{k}_i)\bar{v}(\mathbf{k}_i)$ . En outre, les relations qui permettent de relier  $\bar{K}_i \pm M_i$  aux spineurs supposent que l'énergie est positive. Si ce n'est pas le cas, il est plus commode de choisir l'impulsion opposée comme variable (ce qui est tout à fait légitime puisqu'il s'agit d'une variable muette sur laquelle on intègre) pour se ramener au cas précédent.

Concernant les poids statistiques, on a les identités  $\epsilon(k_i^o)n_F(k_i^o) = n_F(|k_i^o|) - \theta(-k_i^o)$  et  $\epsilon(k_i^o)n_B(k_i^o) = n_B(|k_i^o|) + \theta(-k_i^o)$ . En d'autres termes, suivant le signe des énergies, tout s'arrange dans cette formule afin que l'on ait les poids statistiques qui conviennent pour des particules entrantes ou sortantes, sans qu'on ait à les imposer à la main.

Dans cette relation, on peut interpréter les différents facteurs très facilement. Les facteurs de la première ligne donnent les distributions  $\delta(\cdot)$  assurant que les lignes externes des amplitudes sont sur couche, ainsi que les poids statistiques qui correspondent au signe de l'énergie (*i.e.* adaptés selon que les particules entrent ou sortent dans cette collision). Sur les deuxième et troisième lignes, on trouve l'interférence de deux amplitudes. Toutes deux sont "habillées" par les spineurs et vecteurs de polarisation *ad hoc*.

Donc, si on rassemble ce qui précède, on voit que le taux de production de photons donné par la formule de WELDON (6.2) se met sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt d^3\mathbf{x}} &= \frac{dq_o d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^4} \sum_{\text{coupures}} \\ &\times \prod_{\text{quarks } i} 2\pi\delta(K_i^2 - M_i^2)\epsilon(k_i^o)n_F(k_i^o) \prod_{\text{gluons } j} 2\pi\delta(K_j^2)\epsilon(k_j^o)n_B(k_j^o) \\ &\times \left[ F_{\mu, \{\mu_j\}}^{AR\dots R}(-Q, K_1, \dots, K_n) \right] \epsilon^\mu(Q) \prod_{\text{gluons } j} \epsilon^{\mu_j}(K_j) \prod_{\text{quarks } i} u(\mathbf{k}_i) \\ &\times \left[ G_{\nu, \{\nu_j\}}^{AR\dots R}(-Q, K_1, \dots, K_n) \right]^* \epsilon^{*\nu}(Q) \prod_{\text{gluons } j} \epsilon^{*\nu_j}(K_j) \prod_{\text{quarks } i} \bar{u}(\mathbf{k}_i) \quad (6.9) \end{aligned}$$

qui est en parfait accord avec la façon intuitive d'écrire le taux de production dans la section 6.2.1.<sup>7</sup> En effet, la somme sur les coupures permet de faire la somme sur toutes les interférences possibles. Ceci achève donc de justifier la formule (6.2).

Au cours de cette preuve, il est apparu que la formule (6.2) regroupe de façon condensée un grand nombre de processus différents. En fait, si on inclut dans

<sup>7</sup>Dans le cas où les amplitudes  $F^{AR\dots R}$  et  $G^{AR\dots R}$  ne contiennent pas de boucles, on peut vérifier très facilement qu'elles ne contiennent pas de poids statistiques. Elles sont alors égales aux mêmes amplitudes calculées à température nulle, et la dépendance du taux de production vis à vis de la température vient uniquement de l'intégration sur l'espace des phases des particules inobservées. Par contre, s'il reste des boucles dans ces amplitudes, alors des corrections thermiques vont venir aussi des amplitudes elles-mêmes.

Im  $\Pi^{RA}$  tous les diagrammes contribuant à un ordre donné, cette formule sommerait les contributions de tous les processus contribuant au taux de production à cet ordre en  $g$  et se chargerait d'inclure tous les processus qui s'en déduisent par changement du signe de certaines énergies (*i.e.* par croisement), ainsi que toutes les interférences nécessaires.

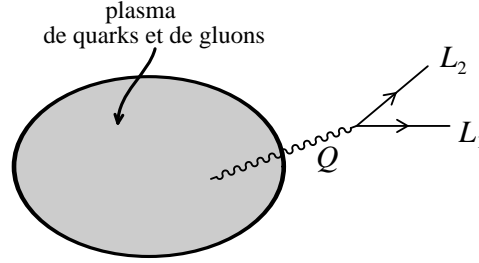
### 6.2.3 Production de paires de leptons

La formule (6.2) est valable que le photon produit soit sur le cône de lumière ou bien virtuel. Dans le cas où il est réel, on peut simplifier l'élément de volume associé à son espace des phases de la façon suivante

$$\frac{dq_o d^3 \mathbf{q}}{(2\pi^4)} \rightarrow \frac{dq_o d^3 \mathbf{q}}{(2\pi^4)} 2\pi \theta(q_o) \delta(Q^2) = \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3 2q_o} . \quad (6.10)$$

Dans le cas où le photon produit est massif, on observera plutôt dans le détecteur le produit de la désintégration de ce photon virtuel, *i.e.* vraisemblablement une paire de leptons. Expérimentalement, on peut à partir des deux

FIG. 6.6 – Production d'une paire de leptons.



leptons reconstruire l'impulsion du photon initial, et reconstituer le spectre des photons massifs produits. Simplement, il faut tenir compte du propagateur du photon virtuel, et du couplage du photon aux leptons. Ce faisant, le taux de production de photons virtuel se désintégrant en une paire de leptons est donné par une variante de la formule (6.2) :

$$\frac{dN}{dt d^3 \mathbf{x}} = - \frac{dq_o d^3 \mathbf{q}}{12\pi^4} \frac{\alpha}{Q^2} n_B(q_o) \text{Im} \Pi^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) . \quad (6.11)$$

## Chapitre 7

# Boucles dures : des concepts aux limitations

**INFINI.**

Ce comble de la positivité est exprimé par une double négation : *in-fini*.

MICHEL TOURNIER

*Le pied de la lettre, trois cents mots propres*

**U**n des progrès essentiels pour le développement perturbatif en théorie des champs à température finie a été réalisé par BRAATEN et PISARSKI qui ont introduit en 1989-1990 [74, 75] (voir aussi [76, 99]) le concept de boucle thermique dure.<sup>1</sup> Il s'agit de diagrammes à une boucle qui sont du même ordre de grandeur que la fonction analogue à l'ordre des arbres lorsque toutes les impulsions externes sont suffisamment petites. Après avoir montré leur importance, ils ont proposé une théorie effective qui est en fait une réorganisation du développement perturbatif de façon à faire apparaître les corrections apportées par les boucles dures à côté des termes en arbre plutôt que dans les ordres supérieurs de ce développement. Il s'est également avéré que cette théorie effective est très utile dans le secteur infrarouge où elle apporte une amélioration considérable sous la forme de masses thermiques qui écrantent de nombreuses singularités.

Dans ce chapitre, j'expose les principes de base de cette amélioration de la série perturbative, ainsi que de sa mise en oeuvre. Je commencerai par donner quelques arguments plaidant en faveur de la nécessité d'une réorganisation de la série perturbative. En particulier, j'expliquerai pourquoi on doit s'attendre

---

<sup>1</sup>Dans toute la suite, j'utilise soit l'expression plus courte de "boucle dure", soit le sigle anglais HTL (Hard Thermal Loop).



à des divergences infrarouges nouvelles en plus de celles qu'on rencontre déjà en théorie des champs à température nulle. En outre, je montrerai comment la présence d'un paramètre dimensionné comme la température dans la théorie rend prévisible l'existence des boucles dures sur la base de simples arguments dimensionnels.

Dans la section suivante, je présenterai le concept de boucle dure dans le cas de l'exemple le plus simple qui puisse se concevoir : celui de la théorie d'un champ scalaire possédant un terme d'interaction quartique. Cet exemple sera suffisant pour exposer les idées de base sans les encombrer par les complications supplémentaires qui sont propres aux théories de jauge. Ces dernières seront évoquées dans la section suivante, où on montrera comment on peut construire à partir des boucles dures une théorie effective qui est invariante de jauge.

Ensuite, à l'aide d'un exemple, j'expose deux méthodes distinctes pour l'implémentation des calculs basés sur les boucles dures. L'une d'elles est basée sur des bornes permettant de diviser le domaine d'intégration en une partie molle et une partie dure. L'autre méthode, un peu plus formelle, est basée sur l'usage de contre-terms permettant d'éviter les double comptages. On verra au passage que la réorganisation de la série perturbative basée sur les boucles dures cesse d'être pertinente lorsque la constante de couplage devient trop importante.

Je consacrerai ensuite une section à quelques remarques sur la renormalisabilité de cette théorie effective. Les deux sections suivantes seront consacrées à exposer les limites de la théorie effective basée sur la sommation des boucles dures. La première montrera qu'il reste encore des problèmes infrarouges dans le secteur des bosons de jauge transverses, ainsi que des problèmes colinéaires lorsque les lignes externes d'une boucle dure sont sur le cône de lumière. La deuxième exposera une autre situation où les boucles dures deviennent insuffisantes parce qu'appliquées en dehors de leur domaine de validité. Cela permettra de donner un critère assez général permettant de décider si un calcul effectué à un ordre donné va recevoir des contributions importantes des ordres supérieurs.

## 7.1 Nécessité des boucles dures

Historiquement, un des premiers succès des boucles dures a été d'apporter une solution à un problème assez vieux concernant le calcul du taux d'amortissement du gluon, *i.e.* de la partie imaginaire de la self-énergie du gluon dans la région de genre temps, qui donne la durée de vie du gluon dans un plasma. Sommairement, les résultats obtenus jusque là par différents groupes dépendaient de la jauge utilisée<sup>2</sup>. On pourra voir les références [100, 101] pour se faire une idée de la dispersion des résultats concernant cette quantité avant 1990. Il a été montré par KOBES, KUNSTATTER et REBHAN dans [102] que la position du pôle dans le propagateur du gluon est indépendante de la jauge, ce qui a définitivement fait apparaître la dépendance de jauge de ce taux d'amortissement (qui est aussi la

---

<sup>2</sup>Même le signe de ce taux d'amortissement semblait dépendre de la jauge dans laquelle le calcul était effectué. Or, ce signe détermine la stabilité de la théorie, et devrait par conséquent être une propriété indépendante du choix de la jauge.

partie imaginaire du pôle du propagateur du gluon) comme un problème très sérieux.

Une autre raison pour justifier une réorganisation du développement perturbatif est liée aux divergences infrarouges que l'on rencontre en théorie des champs à température finie. Il est facile de se convaincre du fait que ces divergences sont a priori plus fortes que celles que l'on rencontre à température nulle, à cause de la nature singulière des poids statistiques de BOSE-EINSTEIN. Dans la région où les énergies sont très petites devant la température, ces fonctions de distribution se comportent de la façon suivante

$$n_B(l_o) = \frac{1}{e^{l_o/T} - 1} \approx \frac{T}{l_o} \gg 1 \quad \text{si} \quad l_o \ll T. \quad (7.1)$$

Si l'on a à l'esprit le formalisme à temps réel, dans sa formulation de base, ce poids statistique est accompagné d'une distribution  $\delta(l_o^2 - \mathbf{l}^2 - m^2)$ , où  $m$  est la masse des bosons correspondants. On voit donc que dans le cas d'un boson massif, le poids statistique possède une borne supérieure donnée par  $|n_B(l_o)| \leq T/m$ , et ne pourra donc pas devenir infini. Il en va différemment du cas de bosons de masse nulle, comme les bosons de jauge dans les théories où la symétrie n'est pas brisée spontanément. Physiquement, la masse nulle de ces bosons est reliée à la portée infinie de l'interaction qu'ils véhiculent. On sait par ailleurs qu'en mécanique statistique classique, les interactions électriques sont écrantées dans un plasma : il s'agit d'un phénomène collectif appelé écrantage de DEBYE. Nous verrons plus loin que l'inclusion des boucles dures dans un Lagrangien effectif permet d'incorporer cet écrantage dans le propagateur des bosons de jauge, et de ce fait d'améliorer le comportement infrarouge des théories thermiques.

Il existe également un argument dimensionnel simple justifiant le fait que certaines corrections thermiques à une boucle restent du même ordre de grandeur que leur analogue en arbre. En effet, la théorie des champs à température finie contient un paramètre dimensionné qui est la température  $T$ , et qui joue le rôle d'une borne supérieure dans les intégrales faisant intervenir un poids statistique. Si on regarde la self-énergie d'un champ scalaire non massif, qui est un objet possédant la dimension 2 en unités de masse, on peut avoir des termes en  $g^2 T^2$ , en  $g^2 T q_o$  et en  $g^2 q_o^2$ , où  $q_o$  est l'énergie externe. Si l'échelle  $q_o$  externe est très petite devant la température  $T$ , la contribution dominante à cette self-énergie sera en  $g^2 T^2$ . Par ailleurs, pour savoir si elle va avoir des effets importants, on doit la comparer à l'inverse du propagateur libre, dont l'ordre de grandeur est  $q_o^2$ . Par conséquent, l'ordre de grandeur relatif de cette self-énergie est donné par  $(gT/q_o)^2$ . On voit donc que ces corrections thermiques deviennent essentielles dès que l'impulsion externes est d'un ordre de grandeur inférieur ou égal à  $gT$ . Cette échelle d'énergie est qualifiée d'échelle molle, par opposition à l'échelle  $T$  qui est qualifiée de dure. Physiquement, on peut associer l'échelle dure à l'énergie typique des partons du plasma, alors que l'échelle molle est plutôt associée à l'énergie des bosons échangés lors des interactions entre les partons du plasma, ce qui est illustré sur la figure 7.1. Ce qui est essentiel dans l'argument précédent, c'est d'avoir un paramètre *dimensionné* qui intervienne dans les calculs comme une *borne supérieure*. On voit en particulier que cela

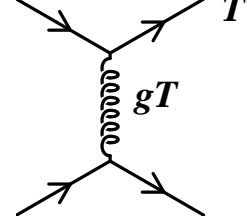


FIG. 7.1 – Echelle dure et échelle molle.

n'est pas le cas d'une masse, qui joue plutôt le rôle d'une borne inférieure, ce qui rend ce mécanisme assez spécifique aux théories thermiques.

## 7.2 Introduction aux boucles dures : $\lambda\phi^4$

### 7.2.1 Modèle

Afin d'illustrer le concept de boucle thermique dure sur un exemple très simple, il est commode de commencer par l'exemple d'un champ scalaire réel en quatre dimensions<sup>3</sup>, interagissant via un terme en  $\lambda\phi^4$ . La constante de couplage  $\lambda$  sera supposée très petite devant 1. En outre, on partira d'un champ scalaire de masse nulle, dont la densité de Lagrangien est donnée par

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (7.2)$$

La nullité de la masse du champ  $\phi$  peut entraîner des divergences infrarouges dans les calculs perturbatifs faisant intervenir ce champ [103].

### 7.2.2 Boucle thermique dure

La première correction apportée à la masse du champ  $\phi$  vient du diagramme à une boucle représenté sur la figure 7.2. La contribution de ce diagramme à la composante retardée de la self-énergie est donnée par

$$\Sigma^{RA} = -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} n_B(p_o) (\Delta_R(P) - \Delta_A(P)), \quad (7.3)$$

dont on peut extraire une partie purement thermique<sup>4</sup>

$$\Sigma_\beta^{RA} = -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} n_B(|p_o|) 2\pi \delta(p_o^2 - \mathbf{p}^2)$$

<sup>3</sup>Comme les boucles dures sont issues de la région ultraviolette de l'espace des phases, leur existence dans une fonction donnée dépend de la dimension de l'espace-temps.

<sup>4</sup>Définie comme la partie qui tend vers zéro si la température tend vers zéro.

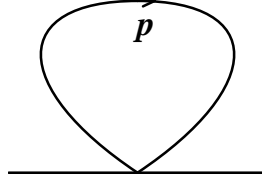


FIG. 7.2 – Self-énergie à une boucle.

$$= -i \frac{\lambda T^2}{24} . \quad (7.4)$$

Cette contribution thermique est qualifiée de boucle dure car c'est la zone dure du domaine d'intégration qui y contribue de façon dominante.

### 7.2.3 Sommation

On constate que la contribution thermique calculée dans le paragraphe précédent engendre une masse d'origine thermique dont l'ordre de grandeur est  $\sqrt{\lambda}T$ . En effet, l'équation de DYSON qui permet de sommer cette self-énergie à tous les ordres sur le propagateur retardé est

$$*\Delta_R(P) = \Delta_R(P) + \Delta_R(P)(-i\Sigma_\beta^{RA}(P))*\Delta_R(P) , \quad (7.5)$$

où  $*\Delta_R(P)$  désigne le propagateur effectif qui résulte de cette sommation. La solution de l'équation précédente est

$$*\Delta_R(P) = \frac{i\mathbb{P}}{P^2 - \lambda T^2/24} + \pi\epsilon(p_o)\delta(P^2 - \lambda \frac{T^2}{24}) , \quad (7.6)$$

qui n'est rien d'autre que le propagateur retardé d'un champ scalaire de masse  $m_\beta \equiv \sqrt{\lambda/24}T$ . Par conséquent, si on utilise ce propagateur effectif dans le développement perturbatif, la théorie effective que l'on obtient est exempte de divergences infrarouges. En outre, on peut noter que la correction thermique apportée par cette sommation de DYSON est quantitativement importante dès que  $p_o, ||\mathbf{p}|| \lesssim m_\beta \sim \sqrt{\lambda}T$ , *i.e.* dès que l'impulsion transportée par le propagateur est molle.

### 7.2.4 Théorie effective

La sommation effectuée précédemment peut être résumée de façon concise grâce à un Lagrangien effectif. En effet, partant du Lagrangien initial donné par la relation (7.2), on peut additionner et soustraire un terme correspondant à la masse thermique  $m_\beta$ , pour obtenir

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{eff}} + \mathcal{L}_{\text{ct}} , \quad (7.7)$$

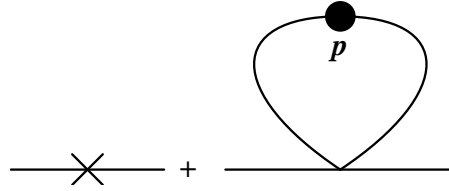
avec

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} \equiv \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m_\beta^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (7.8\text{-a})$$

$$\mathcal{L}_{\text{ct}} \equiv \frac{1}{2} m_\beta^2 \phi^2 . \quad (7.8\text{-b})$$

Le terme  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  n'est autre que la densité de Lagrangien d'un champ scalaire massif, soumis à une interaction quartique. Ce Lagrangien effectif va servir de base pour le développement perturbatif, dont le comportement dans le secteur infrarouge sera considérablement amélioré. Le terme  $\mathcal{L}_{\text{ct}}$  peut être vu comme un contre-terme destiné à laisser inchangé le Lagrangien total. Ce terme sera traité comme une interaction, et va soustraire ordre par ordre la masse qui est incluse dans le Lagrangien effectif. Ne pas tenir compte de ce terme reviendrait à compter plusieurs fois la contribution de la masse thermique. En d'autres termes, on vient juste de procéder à une réorganisation du développement perturbatif de la théorie initiale, sans que celle-ci ait été modifiée.

FIG. 7.3 –  $\Sigma$  au premier ordre de la théorie effective. La boule noire désigne le propagateur dans la théorie effective.



On peut également se demander si l'on pouvait ajouter et soustraire au Lagrangien un terme de masse  $m^2 \phi^2 / 2$  quelconque, sans rapport avec la masse thermique  $m_\beta$ . En effet, si on a seulement à l'esprit une réorganisation du développement perturbatif destinée à améliorer son comportement dans le secteur infrarouge, n'importe quel terme de masse devrait faire l'affaire. On peut toutefois exiger davantage. En effet, on peut choisir  $m$  de façon à minimiser la première correction à la self-énergie calculée dans cette théorie effective. Si l'on tient compte correctement du contre-terme qui retranche la masse  $m$ , comme indiqué sur la figure 7.3, la contribution thermique à une boucle à cette self-énergie est donnée par la relation suivante

$$-i\tilde{\Sigma}_\beta^{RA} = im^2 - i\frac{\lambda}{2} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} n_B(|p_o|) 2\pi \delta(P^2 - m^2) . \quad (7.9)$$

Si on suppose en outre que la masse  $m$  que l'on cherche est très petite devant la température, on peut obtenir le développement asymptotique suivant

$$\tilde{\Sigma}_\beta^{RA} \approx \frac{\lambda T^2}{24} - m^2 - \frac{\lambda m T}{8\pi} . \quad (7.10)$$

Il existe une valeur positive de  $m$  qui permet d'annuler cette correction<sup>5</sup>, et qui est donnée par

$$m = \sqrt{\frac{\lambda T^2}{24} + \left(\frac{\lambda T}{16\pi}\right)^2} - \frac{\lambda T}{16\pi}. \quad (7.11)$$

Dans la limite où la constante de couplage  $\lambda$  est très petite devant l'unité, on constate que cette masse  $m$  ne diffère de la masse thermique  $m_\beta$  donnée par le calcul à une boucle dans la théorie nue que par des termes d'ordre supérieur en  $\lambda$ . Par conséquent, le choix de la masse thermique  $m_\beta$  peut être vu comme celui qui assure que les corrections d'ordre supérieur dans la théorie effective seront bien sous-dominantes. Ce qui précède montre que ce choix est unique à des corrections d'ordre supérieur en  $\lambda$  près.

On voit déjà ici que l'hypothèse sur la petitesse de la constante de couplage est essentielle. En effet, si la constante de couplage est d'ordre 1, la méthode qui consiste à chercher  $m$  comme valeur de la masse qui minimise les corrections d'ordre supérieur ne donne pas le même résultat que le calcul perturbatif du diagramme de la figure 7.2.

## 7.3 Théories de jauge

### 7.3.1 Remarques préliminaires

L'exemple considéré dans la section précédente est particulier pour plusieurs raisons. Tout d'abord, le diagramme à une boucle qui donne la boucle dure peut être calculé exactement si l'on part d'une théorie sans masse. Nous allons voir maintenant que cela n'est pas le cas en général et qu'il faut avoir recours à quelques approximations connues sous le nom d'*approximations de boucle dure*. Par ailleurs, la structure de la boucle dure exhibée dans le cas de la théorie scalaire précédente est extrêmement simple puisqu'elle ne dépend pas de l'impulsion, car elle est issue d'un diagramme de type "tadpole". En général, les boucles dures possèdent une dépendance non triviale dans les impulsions externes, ce qui donne lieu à des couplages non locaux dans le Lagrangien effectif. Enfin, l'autre particularité de la théorie précédente était de n'avoir qu'une seule boucle dure. Dans les théories de jauge au contraire, il y a une série infinie de boucles dures reliées entre elles par des identités de WARD, ce qui permet de construire un Lagrangien effectif invariant de jauge.

### 7.3.2 Extraction des boucles dures

L'exemple le plus simple illustrant dans les théories de jauge l'extraction des termes dominants, qui ne sont autre que les boucles dures, est fourni par la self-énergie d'un électron ou d'un quark (le calcul en QCD ne diffère du calcul en QED que par quelques facteurs de couleur inessentiels pour le sujet qui nous occupe ici). Cette self-énergie est donnée à l'ordre le plus bas par le diagramme

---

<sup>5</sup>L'équation qui donne cette masse  $m$  est connue en anglais sous le nom de "gap equation".

de la figure 7.4. Intéressons-nous pour commencer à la composante thermique

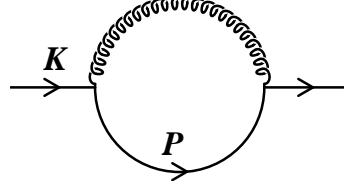


FIG. 7.4 – Self-énergie du quark.

de la self-énergie retardée, dont l'expression dans la jauge de FEYNMAN est

$$-i\Sigma_{\beta}^{RA}(K) = g^2 C_F \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} g_{\mu\nu} \gamma^{\nu} P \gamma^{\mu} \left\{ 2\pi \delta((P-K)^2) n_B(|p_o - k_o|) \Delta_R(P) - 2\pi \delta(P^2) n_F(|p_o|) \Delta_A(P-K) \right\}, \quad (7.12)$$

où  $C_F$  est le Casimir dans la représentation choisie pour les quarks. L'examen de cette intégrale montre qu'elle est exempte de divergences infrarouges, et coupée pour une impulsion  $P$  supérieure à la température par la décroissance exponentielle des poids statistiques. Ces deux propriétés permettent de dire que la contribution dominante à cette intégrale vient de la région dure du domaine d'intégration. On a donc affaire à ce que BRAATEN et PISARSKI [74, 75] appellent une boucle dure. Pour achever simplement le calcul, on se limite ensuite à une impulsion externe  $K$  molle, *i.e.* négligeable devant l'impulsion interne. Par ailleurs, on procède sur le premier terme de l'intégrand à un changement de variables (parfaitement légitime parce que l'intégrale est finie)  $P - K \rightarrow P$ . Ces manipulations, qui constituent ce que l'on qualifie d'approximation de boucle dure, conduisent finalement à l'expression

$$-i\Sigma_{HTL}^{RA}(K) = -g^2 C_F \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} P \frac{2\pi i \epsilon(p_o) \delta(P^2)}{P \cdot K + i p_o \varepsilon} [n_F(p_o) + n_B(p_o)]. \quad (7.13)$$

Cette intégrale présente quelques particularités qui rendent son calcul trivial :

- L'intégration sur  $p_o$  est très simple grâce à la présence de la distribution  $\delta(P^2)$ .
- L'intégration angulaire se découple de l'intégration sur la variable  $p \equiv ||\mathbf{p}||$ .
- Cette dernière intégrale fixe l'ordre de grandeur du résultat final. Oubliant l'intégrale angulaire sans dimension, nous arrivons à :

$$-i\Sigma_{HTL}^{RA}(K) \sim \frac{g^2}{k} \int_0^{+\infty} dp p [n_B(p) + n_F(p)] \sim \frac{g^2 T^2}{k}, \quad (7.14)$$

avec  $k \equiv ||\mathbf{k}||$ .

La boucle dure contenue dans la self-énergie du quark à une boucle permet déjà de vérifier quelques propriétés qui sont vraies de façon générale pour toutes les boucles dures :

- Ce résultat est du même ordre de grandeur que l'inverse du propagateur nu lorsque l'impulsion externe  $K$  est molle.
- On peut démontrer qu'au niveau d'approximation retenu pour effectuer ce calcul, le résultat est invariant de jauge. Il suffit de remarquer qu'après avoir effectué l'approximation de boucle dure, la partie dépendante de jauge dans le propagateur du gluon donne

$$-g^2 C_F \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \xi P_\mu P_\nu \gamma^\nu \not{P} \gamma^\mu n_B(|p_o|) \left\{ 2\pi \delta'(P^2) \frac{i}{2K \cdot P + ip_o \varepsilon} - 2\pi \delta(P^2) \left( \frac{i}{2K \cdot P + ip_o \varepsilon} \right)^2 \right\}, \quad (7.15)$$

où  $\xi$  est le paramètre de jauge. La contraction de  $P_\mu P_\nu$  avec les matrices  $\gamma$  donne  $P^2 \not{P}$ . Par conséquent, certains termes s'annulent trivialement à cause du  $\delta(P^2)$ , et les autres seront d'ordre inférieur car l'action du  $\delta'(P^2)$  sur les autres facteurs diminue le nombre de puissances de l'impulsion dure  $P$  au numérateur. L'expression exacte de cette self-énergie n'est bien sûr pas invariante de jauge.

– L'intégrale angulaire sans dimension  $\int d\Omega / (\hat{P} \cdot \hat{K})$ , avec  $\hat{P} \equiv (1, \hat{\mathbf{p}})$  et  $\hat{K} \equiv (k_o/k, \hat{\mathbf{k}})$ , est usuellement d'ordre 1. Néanmoins, cette intégrale devient logarithmiquement divergente si  $k_o/k = \pm 1$ , ce qui est le cas lorsque l'impulsion externe est sur le cône de lumière. Il s'agit d'une divergence colinéaire, car l'intégrand devient infini lorsque les tri-vecteurs  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{k}$  sont parallèles. Nous reviendrons plus longuement sur ces divergences ultérieurement.

### 7.3.3 Liste des boucles dures

La self-énergie du fermion n'est pas la seule fonction à posséder une boucle dure. Les autres fonctions développant une boucle dure sont la self-énergie du champ de jauge, les fonctions à  $N$  champs de jauge, et les fonctions à  $N-2$  gluons et 2 fermions. Les diagrammes qui y contribuent sont listés sur la figure 7.5. Il est en fait impératif de prendre en compte toutes ces boucles dures simultanément afin d'assurer l'invariance de jauge de la théorie effective.

### 7.3.4 Interprétation physique

#### Quasi-particules

Avant d'aller plus loin dans l'élaboration d'une théorie effective incorporant ces boucles dures, il n'est pas sans intérêt de s'arrêter un instant sur l'interprétation physique des boucles dures dans le cas des fonctions à deux points. Commençons par regarder la position des pôles du propagateur effectif qui résulte de la sommation de DYSON des corrections de boucle dure. Pour ce qui est du gluon, on a après cette sommation deux pôles distincts pour les modes



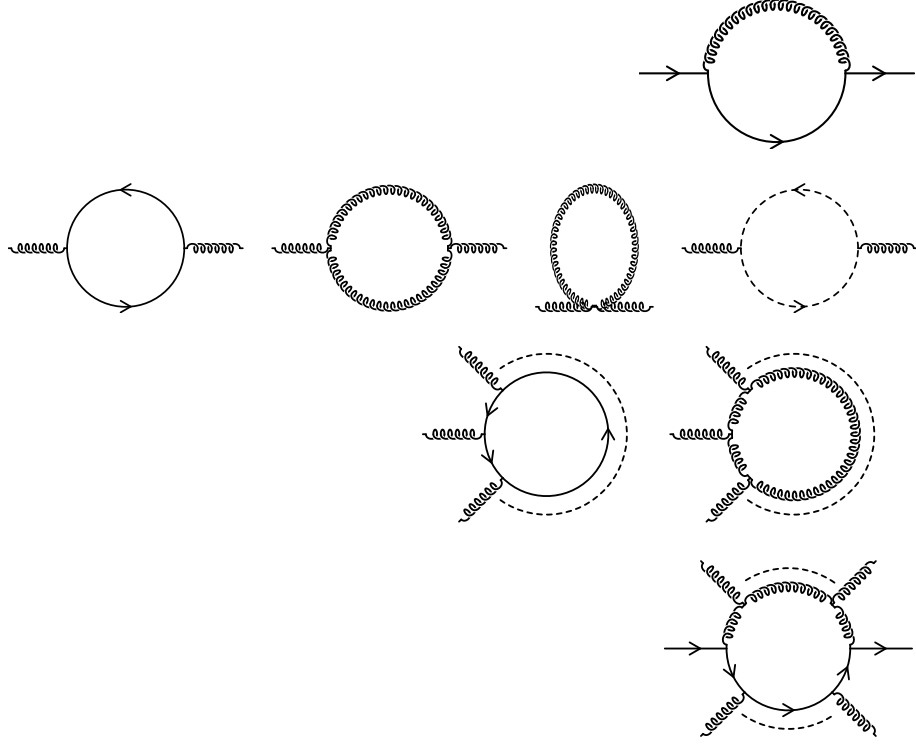


FIG. 7.5 – Liste des boucles dures.

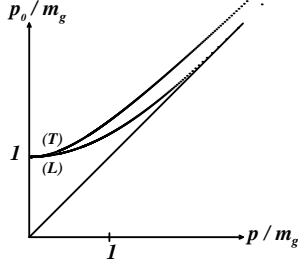
transverses et longitudinaux, qui se sont par ailleurs légèrement déplacés pour se trouver au dessus du cône de lumière. Les nouvelles relations de dispersion des gluons sont représentées sur la figure 7.6, où j'ai noté  $m_g^2 \equiv g^2 T^2 [N + N_f/2]/9$ , pour une théorie comportant  $N$  couleurs et  $N_f$  saveurs. Par conséquent, tout se passe comme si les gluons thermalisés avaient acquis une masse d'origine thermique, d'ordre  $gT$ . On peut également noter que le mode longitudinal se découple comme il se doit de la théorie dans la limite de température nulle<sup>6</sup>, ce qui se traduit par le fait que le résidu du pôle correspondant tend exponentiellement vers zéro. On remarque aussi qu'à l'ordre des boucles dures, la self-énergie du gluon n'a pas de partie imaginaire dans la région de genre temps. Cela signifie que les quasi-particules correspondant aux gluons thermalisés sont stables à cet ordre d'approximation.

Dans le cas du quark, on a également deux modes distincts, usuellement notés (+) et (−), possédant des courbes de dispersion au dessus du cône de lumière. Les relations de dispersion des quarks thermalisés sont représentées sur

<sup>6</sup>Ou encore, à température fixée, dans la limite de haute énergie.

---

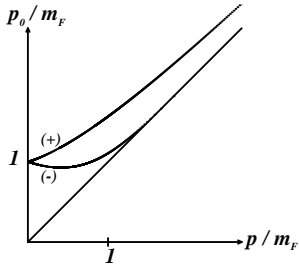
FIG. 7.6 – Relations de dispersion du gluon.



la figure 7.7, sur laquelle je note  $m_F^2 \equiv g^2 C_F T^2 / 2$ . Le mode (+) est l'analogue

---

FIG. 7.7 – Relations de dispersion du quark.



thermique du mode existant à température nulle, alors que le mode (−) est un mode purement collectif, qui se découple de la théorie dans la limite de température nulle. Ici encore, la durée de vie des excitations correspondantes est infinie.

### Ecrantage de Debye

On peut également examiner la self-énergie du gluon dans la région de genre espace, qui correspond aux gluons échangés lors de l'interaction de deux quarks réels. On peut étudier cette self-énergie dans la limite statique pour se faire une idée des modifications que le plasma entraîne sur l'interaction véhiculée par ce

boson de jauge. On obtient en particulier pour le mode longitudinal :<sup>7</sup>

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}} \Pi_L^{HTL}(k_o = 0, \mathbf{k}) = m_D^2 \sim g^2 T^2, \quad (7.18)$$

où  $m_D$  est une masse qui peut être interprétée comme une masse de DEBYE. L'inverse de cette masse définit une longueur (dans les unités où  $\hbar = c = 1$ ), dite longueur de DEBYE<sup>8</sup>, qui est la portée de l'interaction considérée. En effet, dans un milieu dense, le potentiel d'une charge test (électrique ou de couleur) placée dans le plasma est modifié à grande distance par un écrantage exponentiel dont la longueur caractéristique est cette distance de DEBYE. Physiquement, ce

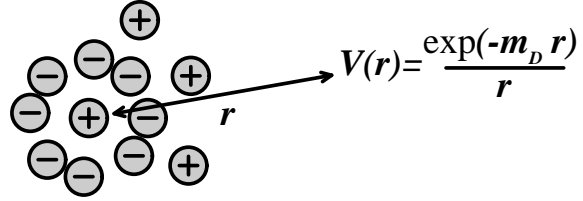


FIG. 7.8 – Ecrantage de Debye en QED.

phénomène est dû au fait que la charge test va être entourée par un “nuage” de charges opposées issues du milieu environnant, de sorte qu’un observateur lointain voit une charge effective beaucoup plus petite que la charge test. Ce phénomène est illustré sur la figure 7.8.

<sup>7</sup> En théorie des champs à température finie, on peut définir les projecteurs transverse et longitudinal selon la direction du vecteur  $Q$  par

$$P_T^{\mu\nu}(Q) = \gamma^{\mu\nu} - \frac{\kappa^\mu \kappa^\nu}{\kappa^2} \quad (7.16-a)$$

$$P_L^{\mu\nu}(Q) = U^\mu U^\nu + \frac{\kappa^\mu \kappa^\nu}{\kappa^2} - \frac{Q^\mu Q^\nu}{Q^2}, \quad (7.16-b)$$

où  $\gamma^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} - U^\mu U^\nu$  et  $\kappa^\mu \equiv \gamma^{\mu\nu} Q_\nu$ . Ensuite, si on écrit le tenseur de polarisation du gluon sous la forme  $\Pi^{\mu\nu}(Q) = -\Pi_T(Q)P_T^{\mu\nu}(Q) - \Pi_L(Q)P_L^{\mu\nu}(Q)$ , on peut extraire les composantes longitudinale et transverse au moyen des relations suivantes :

$$\Pi_L(q_o, \mathbf{q}) = \frac{Q^2}{q^2} \Pi^{00}(q_o, \mathbf{q}) \quad (7.17-a)$$

$$\Pi_T(q_o, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2} \left( \frac{Q^2}{q^2} \Pi^{00}(q_o, \mathbf{q}) + \Pi^\mu{}_\mu(q_o, \mathbf{q}) \right), \quad (7.17-b)$$

qui sont valables dans le référentiel propre du plasma.

<sup>8</sup> Dans un plasma constitué d’électrons et de positrons, à une température faible devant la masse des électrons, on peut vérifier que la théorie des champs à température finie conduit au même résultat que celui qui a été obtenu par DEBYE par des techniques élémentaires.

## Amortissement de Landau

On peut enfin terminer cette section sur les phénomènes physiques pris en compte par les boucles dures avec l'amortissement de LANDAU. Si l'on regarde la partie imaginaire des self-énergies dans la région de genre espace cette fois, on trouve un résultat non nul qui est du même ordre de grandeur que la partie réelle des boucles dures. Cette partie imaginaire est la manifestation de l'amortissement que subit une onde dans le plasma du fait de l'absorption des quanta qui la constituent par les partons du plasma.

Cette phénomène aura des conséquences importantes dans la théorie effective qui utilise les propagateurs incluant la correction due aux boucles dures. En effet, si on note  $*S^{AR}(P)$  le propagateur retardé effectif du quark, il est relié au propagateur retardé nu  $S^{AR}(P)$  par une équation de DYSON

$$*S^{AR}(P) = S^{AR}(P) + *S(P)^{AR}(-i\Sigma_{HTL}^{RA}(P))S^{AR}(P). \quad (7.19)$$

Si on prend ensuite la discontinuité de cette équation, on obtient

$$\begin{aligned} \text{Disc}(*S^{AR}(P)) = & \text{Disc}(S^{AR}(P)) \\ & + \text{Disc}(*S^{AR}(P))(-i\Sigma_{HTL}^{RA}(P))S^{AR}(P) \\ & + *S^{RA}(P)\text{Disc}(-i\Sigma_{HTL}^{RA}(P))S^{AR}(P) \\ & + *S^{RA}(P)(-i\Sigma_{HTL}^{RA}(P))\text{Disc}(S^{AR}(P)). \end{aligned} \quad (7.20)$$

Si on se place ensuite dans la région de genre espace, où  $P^2 < 0$ , on obtient une simplification liée au fait que la discontinuité du propagateur nu  $S^{AR}(P)$  est nulle dans cette partie de l'espace des phases, de sorte que l'on a maintenant :

$$\begin{aligned} \text{Disc}(*S^{AR}(P)) &= *S^{RA}(P)\text{Disc}(-i\Sigma_{HTL}^{RA}(P))S^{AR}(P)[1 + i\Sigma_{HTL}^{RA}(P)S^{AR}(P)]^{-1} \\ &= *S^{RA}(P)\text{Disc}(-i\Sigma_{HTL}^{RA}(P))*S^{AR}(P). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Cette relation signifie que la discontinuité du propagateur effectif dans la région de genre espace permet d'inclure des processus (via la boucle contenue dans  $\Sigma_{HTL}^{RA}$ ) qui n'apparaissent qu'à l'ordre suivant dans la théorie nue.

### 7.3.5 Propriétés générales

L'ensemble des boucles dures répertoriées plus haut possède un certain nombre de propriétés remarquables communes, qui les rendent d'un usage relativement simple.

— Toutes ces boucles dures ont le même ordre de grandeur que leur analogue à l'ordre des arbres lorsque toutes les impulsions externes sont molles. Par conséquent, ces corrections à une boucle sont quantitativement importantes

dans le calcul des quantités thermiques mettant en jeu des excitations molles, et devront être incorporées systématiquement dans un Lagrangien effectif.

– Les boucles dures sont indépendantes de jauge [74]. En d’autres termes, l’approximation de boucle dure ne retient que des termes qui sont invariants de jauge. Cette propriété tend à justifier leur aspect intrinsèque, et le fait qu’elles incorporent seulement des informations physiques.

– Les boucles dures vérifient des identités de WARD de type abélien [75], même dans une théorie dont le groupe de jauge est non abélien. Par exemple, on a la relation suivante pour la partie HTL du couplage à quatre gluons :

$$S_\sigma \Gamma_{HTL}^{\mu\nu\lambda\sigma}(P, Q, R, S) = \Gamma_{HTL}^{\mu\nu\lambda}(P + S, Q, R) - \Gamma_{HTL}^{\mu\nu\lambda}(P, Q, R + S) . \quad (7.22)$$

– Pour  $N \geq 3$ , les boucles dures sont de trace nulle lorsqu’on contracte n’importe quelle paire d’indices de LORENTZ de gluons.

– Les boucles dures contiennent une information qui est essentiellement classique. Ainsi, elles ont pu être obtenues par des méthodes de théorie cinétique, et reliées à des phénomènes de transport [104, 105, 106, 107].

### 7.3.6 Construction d’un Lagrangien effectif

Afin d’illustrer la construction d’un Lagrangien effectif [108, 99] incorporant ces boucles dures, considérons l’exemple des fonctions possédant deux lignes externes fermioniques et un nombre arbitraire de gluons. La contribution de boucle dure à la self-énergie du quark est :

$$\Sigma^{HTL}(K) = \frac{g^2 T^2 C_F}{2} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{p}}}{4\pi} \frac{\hat{P}}{K \cdot \hat{P}} . \quad (7.23)$$

Pour obtenir à partir de ce résultat le terme à insérer dans le Lagrangien pour engendrer cette fonction, il suffit de procéder aux substitutions suivantes :

$$K_\mu \rightarrow i\partial_\mu \quad (7.24\text{-a})$$

$$\Sigma^{HTL} \rightarrow \bar{\Psi} \Sigma^{HTL} \Psi , \quad (7.24\text{-b})$$

ce qui donne la correction suivante au Lagrangien :

$$\delta \mathcal{L}_{q\bar{q}} = \frac{g^2 T^2 C_F}{2} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{p}}}{4\pi} \bar{\Psi} \frac{\hat{P}}{i\partial \cdot \hat{P}} \Psi . \quad (7.25)$$

A ce stade, le terme obtenu engendre correctement la self-énergie du quark à l’ordre des boucles dures, mais n’est manifestement pas invariant de jauge. Pour rétablir l’invariance de jauge, il est suffisant de remplacer la dérivée ordinaire  $i\partial_\mu$  par une dérivée covariante  $iD_\mu \equiv i\partial_\mu - gA_\mu$ , ce qui donne

$$\delta \mathcal{L}_{q\bar{q}A} = \frac{g^2 T^2 C_F}{2} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{p}}}{4\pi} \bar{\Psi} \frac{\hat{P}}{iD \cdot \hat{P}} \Psi . \quad (7.26)$$

Ce terme est maintenant explicitement invariant de jauge, et engendre en outre toutes les boucles dures pour les fonctions avec 2 quarks et un nombre arbitraire de gluons. Il suffit pour cela de faire un développement de TAYLOR en puissances de  $g$  du dénominateur. On voit donc ici que l'existence d'une infinité de boucles dures est intimement liée à l'invariance de jauge de la théorie. On peut également noter la force des contraintes que l'invariance de jauge fait peser sur la structure du Lagrangien effectif : connaissant seulement la partie quadratique de ce Lagrangien (*i.e.* la partie qui engendre les fonctions à deux points), l'invariance de jauge permet d'écrire la forme du Lagrangien qui va engendrer toutes les autres fonctions.

Des techniques similaires, quoique un peu plus calculatoires, peuvent être mises en oeuvre pour obtenir le terme du Lagrangien qui engendre les boucles dures purement gluoniques : partant de la fonction à deux gluons, une transformation de jauge infinitésimale permet de déterminer le Lagrangien engendrant toutes les boucles dures à  $N$  gluons. Citons seulement le résultat :

$$\delta\mathcal{L}_A = \frac{g^2 T^2}{6} \left( N + \frac{N_f}{2} \right) \text{Tr} \left[ \int \frac{d\Omega_{\mathbf{p}}}{4\pi} F_{\mu\alpha} \frac{\hat{P}^\alpha \hat{P}^\beta}{(iD \cdot \hat{P})^2} F^\mu{}_\beta \right], \quad (7.27)$$

où  $D$  désigne cette fois la dérivée covariante agissant sur la représentation des gluons :  $iD_\mu = i\partial_\mu - g[A_\mu, \cdot]$ . Une conséquence simple de cette formule est qu'il n'y a pas de boucle dure dans les fonctions à plus de deux champs de jauge dans une théorie de jauge abélienne.

On peut noter que ces corrections au Lagrangien sont non locales du fait de la présence de dérivées au dénominateur. Cela est une conséquence de l'expression analytique compliquée des relations de dispersion du gluon et du quark thermalisés, qui ne sont pas celles de simples particules massives.

## 7.4 Contre-termes ou coupures

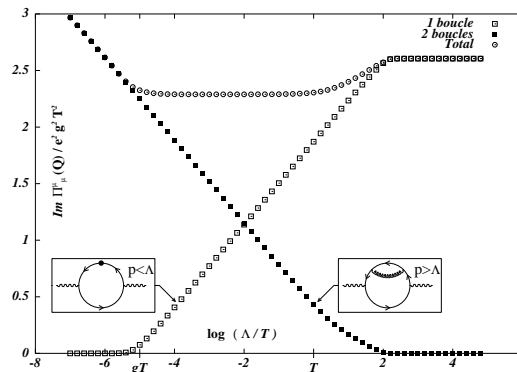
Il convient maintenant de dire quelques mots sur l'implémentation de cette théorie effective pour calculer des diagrammes d'ordre supérieur. Lors de cette mise en oeuvre, il convient d'avoir à l'esprit le domaine de validité de l'approximation de boucle dure. Cette dernière est une approximation correcte des corrections à une boucle correspondantes lorsque les impulsions externes sont molles. La méthode que j'expose ici pour contrôler si on reste dans le domaine de validité de l'approximation de boucle dure a été proposée par BRAATEN et THOMA. En principe, tout calcul faisant intervenir un propagateur ou un vertex effectifs doit utiliser une borne supérieure limitant la valeur que peut prendre l'impulsion circulant dans le propagateur ou entrant dans le vertex. Ensuite, on doit faire tendre cette borne supérieure vers l'infini afin de voir si le résultat obtenu est sensible ou pas aux impulsions dures. Pratiquement, si la dépendance dans la borne supérieure est d'ordre inférieur en  $g$ , cela signifie que le résultat est peu sensible à la région dure du domaine d'intégration, et qu'on reste toujours dans le domaine où les boucles dures fournissent une approximation correcte. Par

Afin de rendre cette discussion plus parlante, je vais l'illustrer par un exemple emprunté à BAIER, NAKKAGAWA, NIEGAWA et REDLICH [109]. Il s'agit du calcul du taux de production de photons réels durs, qui se ramène au calcul de la partie imaginaire du tenseur de polarisation du photon. A une boucle dans la théorie effective, cette quantité implique le diagramme suivant

$$A_I \equiv \text{Im} \int_0^\Lambda dp \quad \text{---} \text{wavy} \text{---} \text{circle} \text{---} \text{wavy} \text{---}, \quad (7.28)$$

où  $\Lambda$  est une borne supérieure vérifiant a priori  $gT \ll \Lambda \ll T$ . On peut noter qu'un seul propagateur effectif est nécessaire car au plus un des deux quarks peut être mou. Le résultat de ce calcul est représenté sur la figure 7.9, où l'on constate une dépendance logarithmique vis à vis de  $\Lambda$ , indiquant une sensibilité de cette boucle aux impulsions dures. Il convient donc d'étudier les diagrammes

FIG. 7.9 – Compensation de la dépendance vis à vis de la borne supérieure dans le calcul de Baier et al.



à deux boucles. Compte tenu de la nature du diagramme à une boucle que nous avons regardé jusque là, la contribution à deux boucles la plus naturelle est la suivante<sup>9</sup>

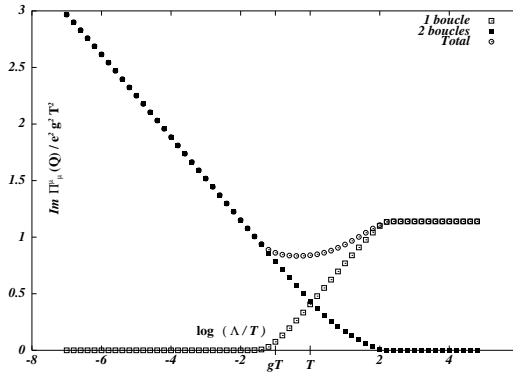
$$A_{II} \equiv \text{Im} \int_{\Lambda}^{+\infty} dp \text{ wavy line } \text{ circle } \text{ wavy line } p \text{ .} \quad (7.29)$$

<sup>9</sup>La topologie à deux boucles impliquant une correction d'un vertex  $\gamma q \bar{q}$  est en fait nulle dans la jauge de Feynman.

Il est ici très important d'utiliser  $\Lambda$  comme borne inférieure pour éviter les double comptages des corrections thermiques déjà incluses à une boucle via le propagateur effectif. Ici, les corrections de boucle dure sont inutiles car toutes les impulsions sont dures du fait de la borne inférieure  $\Lambda$ . On constate sur la figure 7.9 que ce diagramme à deux boucles dépend également de  $\Lambda$ , et qu'en outre sa dépendance en  $\Lambda$  compense exactement la dépendance en  $\Lambda$  du diagramme à une boucle étudié précédemment. Ainsi, la somme de ces deux contributions est totalement indépendante de la valeur de la borne  $\Lambda$ , et ce pratiquement pour toute valeur de  $\Lambda$  située entre  $gT$  et  $T$ . Cette propriété peut être vue comme un test de la cohérence du calcul effectué dans le sens où elle indique que l'on a vraisemblablement considéré les contributions à deux boucles pertinentes pour l'observable considérée.

Ces considérations nous permettent également de faire quelques remarques concernant la petitesse de la constante de couplage  $g$ . Sur la figure 7.9, j'ai volontairement choisi une constante de couplage extrêmement petite ( $10^{-5}$ ) afin d'être dans le cadre qui a servi à justifier le concept de boucle dure. Néanmoins, pour des raisons pratiques liées au fait que la constante de couplage de QCD aux énergies attendues dans les collisions de noyaux lourds (quelques centaines de MeV) est plutôt d'ordre 2, il est intéressant de voir ce que devient le schéma idéal précédent lorsque la constante de couplage augmente. La figure 7.10 représente le résultat numérique du même calcul effectué cette fois avec une constante de couplage valant  $g = 10^{-1}$ . Même si cette valeur de  $g$  peut encore être considérée petite devant l'unité, on voit déjà que la zone à l'intérieur de laquelle on peut considérer la somme des deux termes comme indépendante de  $\Lambda$  est beaucoup plus réduite. En fait, au lieu d'avoir un plateau comme c'était

FIG. 7.10 – Effet de la valeur de la constante de couplage. Cette figure représente le même calcul que la précédente, avec  $g = 0.1$  au lieu de  $g = 10^{-5}$ .



le cas pour  $g = 10^{-5}$ , on doit maintenant se contenter d'un minimum. C'est en se plaçant à ce minimum que l'on va réduire la sensibilité vis à vis de ce paramètre non physique qu'est  $\Lambda$ . Si on continue d'augmenter la constante de couplage, on risque même d'arriver à une situation dans laquelle on n'a même



Une approche alternative à l'usage d'un paramètre servant de borne supérieure consiste à utiliser des contre-terms pour éviter les double comptages [110, 88, 89]. Schématiquement, ces contre-terms apparaissent parce qu'on veut garder inchangé le Lagrangien total (voir l'équation (7.7)), afin que la sommation des boucles dures ne soit qu'une réorganisation du développement perturbatif. Dans le cas de l'exemple précédent, on aurait calculé à une boucle l'expression suivante

Cette intégrale est bien sûr convergente même en l'absence de la borne supérieure  $\Lambda$  car la cinématique et la température coupent naturellement l'intégrale dans l'ultraviolet. Les corrections à apporter à cette quantité viennent des contributions d'ordre supérieur suivantes :

On peut vérifier explicitement que dans les situations pour lesquelles existe une région où le résultat est indépendant de  $\Lambda$  (*i.e.* lorsque  $g$  est suffisamment petite), les deux méthodes donnent le même résultat. Un des avantages majeurs de la méthode utilisant des contre-terme plutôt qu'une coupure séparant l'échelle dure de l'échelle molle réside dans le fait qu'il est plus simple d'utiliser des contre-terme dans les diagrammes possédant des boucles avec des recouvrements. Par contre, il est probablement illusoire de penser que cette méthode va résoudre les problèmes rencontrés avec la méthode précédente lorsque la constante de couplage est trop grande. La question de fond qui consiste à savoir quand la séparation entre une échelle molle et une échelle dure cesse d'être pertinente est cachée, mais pas évitée, par l'usage des contre-terme.

Etant donné que la théorie effective qui résulte de la sommation des boucles dures est équivalente à un réarrangement des termes de la série perturbative, il est légitime de se demander si elle est encore renormalisable. La réponse la

plus succincte consiste à dire que la sommation des boucles dures n'affecte de façon significative que les modes mous de la théorie, et ne change rien à ce qui se passe dans le secteur ultraviolet. En fait, le réarrangement du développement perturbatif qui est effectué à cette occasion ne concerne que des contributions purement thermiques qui sont finies dans l'ultraviolet. Il est donc à peu près clair que le nouveau développement perturbatif correspondra à une théorie renormalisable.

On peut en fait être un peu plus précis que cela en calculant le degré superficiel de divergence d'un diagramme issu de cette théorie effective. Pour cela, il faut commencer par donner le comportement ultraviolet des couplages effectifs et des contre-terms<sup>10</sup>. Un comptage de puissances sommaire indique qu'une boucle dure à  $N$  gluons se comporte comme  $g^N T^2/p^{N-2}$  où  $p$  désigne l'échelle des impulsions externes, alors qu'un vertex à 2 quarks et  $N-2$  gluons se comporte comme  $g^N T^2/p^{N-1}$ .

Considérons maintenant un diagramme  $\mathcal{G}$  arbitraire. Notons  $E_\psi$  et  $E_A$  le nombre de ses lignes externes transportant respectivement des quarks et des gluons. Désignons par  $I_G$ ,  $I_\psi$ ,  $I_A$  le nombre de ses lignes internes transportant respectivement des fantômes de FADEEV-POPOV, des quarks et des gluons. Soient  $V_A^3$ ,  $V_A^4$ ,  $V_\psi^3$  et  $V_G$  respectivement le nombre de vertex à 3 gluons, à 4 gluons, à 2 quarks et 1 gluon, et à 2 fantômes et 1 gluon. Tous ces vertex contiennent une partie nue qui est dominante dans le secteur ultraviolet. Viennent enfin les vertex et contre-terms qui n'ont pas de contrepartie dans la théorie nue. Soit  $V_A^N$  ( $N \geq 5$ ) le nombre de vertex à  $N$  gluons, et  $V_\psi^N$  ( $N \geq 4$ ) le nombre de vertex à  $N-2$  gluons et 2 quarks. Soit enfin  $C_A^N$  ( $N \geq 2$ ) le nombre de contre-terms à  $N$  gluons et  $C_\psi^N$  ( $N \geq 2$ ) le nombre de contre-terms à  $N-2$  gluons et 2 quarks.

Toutes ces quantités sont reliées par les relations suivantes

$$\begin{aligned} 2I_\psi + E_\psi &= 2 \sum_{N \geq 3} V_\psi^N + 2 \sum_{N \geq 2} C_\psi^N \\ 2I_A + E_A &= V_G + \sum_{N \geq 3} N V_A^N + (N-2) V_\psi^N + \sum_{N \geq 2} N C_A^N + (N-2) C_\psi^N \\ 2I_G &= 2V_G, \end{aligned} \quad (7.32)$$

qui traduisent l'égalité entre le nombre de champs d'un type donné sur les propagateurs et sur les vertex. Le nombre de boucles indépendantes est donné quant à lui par la relation suivante

$$L = 1 + I_\psi + I_A + I_G - V_G - \sum_{N \geq 3} V_\psi^N + V_A^N - \sum_{N \geq 2} C_\psi^N + C_A^N. \quad (7.33)$$

Finalement, le degré superficiel de divergence de ce diagramme est donné par :

$$\omega(\mathcal{G}) = 4L + V_A^3 + V_G - 2I_A - I_\psi - 2I_G$$

<sup>10</sup>Les contre-terms sont en fait l'opposé du couplage effectif correspondant, et se comportent donc de manière identique dans l'ultraviolet.

$$\begin{aligned}
& - \sum_{N \geq 5} (N-2) V_A^N - \sum_{N \geq 4} (N-1) V_\Psi^N \\
& - \sum_{N \geq 2} (N-2) C_A^N + (N-1) C_\Psi^N , \tag{7.34}
\end{aligned}$$

qui se ramène au moyen des relations précédentes à la forme plus simple suivante<sup>11</sup>

$$\omega(\mathcal{G}) = 4 - E_A - \frac{3}{2} E_\Psi - 2 \left( \sum_{N \geq 5} V_A^N + \sum_{N \geq 4} V_\Psi^N + \sum_{N \geq 2} C_A^N + C_\Psi^N \right) . \tag{7.36}$$

On voit que la différence entre  $\omega(\mathcal{G})$  et  $\omega_{\text{nu}}(\mathcal{G})$  vient seulement des vertex et contre-termes qui n'ont pas d'équivalent dans la théorie nue. On constate aussi que  $\omega(\mathcal{G})$  est toujours inférieur ou égal à  $\omega_{\text{nu}}(\mathcal{G})$ , ce qui signifie que la liste des fonctions à renormaliser est la même que dans la théorie nue. Même si ceci n'est pas une preuve rigoureuse de la renormalisabilité de la théorie effective basée sur la sommation des boucles dures, ces quelques propriétés semblent indiquer que cette théorie effective est renormalisable au moyen des mêmes contre-termes<sup>12</sup> que la théorie nue.

## 7.6 Problèmes résiduels

### 7.6.1 Gluons transverses

Au début de ce chapitre, on notait que des divergences infrarouges supplémentaires apparaissent en théorie des champs à température finie du fait du comportement singulier des poids de BOSE-EINSTEIN dans cette région de l'espace des phases. On a également vu que cela n'est un problème que si des bosons de masse nulle existent dans la théorie : en effet, pour des particules massives, ces poids statistiques sont toujours accompagnés par une distribution de DIRAC pour donner  $n_B(p_o) \delta(P^2 - m^2)$  de sorte que le poids statistique reste borné. On pourrait donc penser que l'on n'a plus aucun problème infrarouge dans la théorie une fois que l'on a sommé les boucles dures puisque les quasi-particules possèdent maintenant une masse.

Toutefois, cela n'est pas le cas pour la raison suivante : outre le fait de donner une masse aux excitations réelles de la théorie, la sommation des boucles dures sur le propagateur ouvre l'espace des phases dans la région de genre espace. Techniquement, cela est dû au fait que la self-énergie du gluon possède une partie

---

<sup>11</sup>Rappelons que dans la théorie nue, le degré superficiel de divergence du diagramme  $\mathcal{G}$  est donné par la formule

$$\omega_{\text{nu}}(\mathcal{G}) = 4 - E_A - \frac{3}{2} E_\Psi . \tag{7.35}$$

<sup>12</sup>Il s'agit ici des contre-termes infinis destinés à soustraire les divergences ultraviolettes, à ne pas confondre avec les contre-termes finis qui compensent les comptages multiples des corrections thermiques.

imaginaire dans la région de genre espace.<sup>13</sup> En effet, la contribution de boucle dure aux self-énergies du gluon transverse et longitudinal sont respectivement

$$\Pi_T^{HTL}(k_o, \mathbf{k}) = \frac{3m_g^2}{2} \left[ \frac{k_o^2}{k^2} + \frac{k_o}{2k} \left( 1 - \frac{k_o^2}{k^2} \right) \ln \left( \frac{k_o + k}{k_o - k} \right) \right] \quad (7.37-a)$$

$$\Pi_L^{HTL}(k_o, \mathbf{k}) = 3m_g^2 \left[ 1 - \frac{k_o^2}{k^2} \right] \left[ 1 - \frac{k_o}{2k} \ln \left( \frac{k_o + k}{k_o - k} \right) \right], \quad (7.37-b)$$

et les logarithmes possèdent une coupure pour  $-k \leq k_o \leq k$ , ce qui engendre une partie imaginaire dans la région de genre espace.

Comme la partie thermique du propagateur effectif du gluon est de la forme

$$n_B(|k_o|) \text{Im} \frac{1}{K^2 - \Pi_{T,L}^{HTL} + i\varepsilon}, \quad (7.38)$$

on voit qu'elle contient, outre la fonction  $\delta(\cdot)$  qui correspond au pôle du propagateur, une contribution dont le support est dans la région de genre espace du fait de la partie imaginaire de  $\Pi_{T,L}^{HTL}$ , ce qui donne :

$$n_B(|k_o|) \left[ 2\pi Z_{T,L} \delta(k_o^2 - \omega_{T,L}^2(k)) - 2\theta(k^2 - k_o^2) \frac{\text{Im} \Pi_{T,L}^{HTL}}{(K^2 - \text{Re} \Pi_{T,L}^{HTL})^2 + (\text{Im} \Pi_{T,L}^{HTL})^2} \right]. \quad (7.39)$$

Dans l'équation précédente,  $\omega_{T,L}(k)$  désigne la solution de la relation de dispersion du gluon, et  $Z_{T,L}$  les résidus associés aux pôles transverse et longitudinal du propagateur effectif. Dans cette expression, les termes correspondant aux pôles sont régularisés par la masse thermique qui empêche le poids statistique de devenir infini.

Par contre, le dernier terme peut attendre la valeur  $k_o = 0$  dans la région de genre espace. Le point  $k_o = 0$  n'est pas singulier tant que  $k$  reste fini car  $\text{Im} \Pi_{T,L}^{HTL}$  s'annule en ce point, compensant ainsi la singularité du poids statistique. Toutefois, on peut avoir ultérieurement des problèmes avec l'intégration sur la tri-impulsion  $\mathbf{k}$  si la limite  $\lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} \text{Re} \Pi_{T,L}^{HTL}(k_o = 0, \mathbf{k})$  est nulle. Dans le cas du gluon longitudinal, cela n'est pas le cas car cette limite donne la masse de DEBYE qui est non nulle. Les problèmes viennent en fait des gluons transverses, car cette quantité est alors nulle. Physiquement, cela signifie que les champs magnétiques statiques ne sont pas écrantés dans un plasma. Ce résultat a été démontré de façon non perturbative par FRADKIN dans le cas de QED. En QCD, le statut de cette *masse magnétique* est beaucoup plus incertain, car le résultat prouvé pour QED ne peut pas être généralisé aux théories de jauge non abéliennes. En effet, il est possible qu'une masse magnétique soit engendrée par l'auto-interaction des champs de jauge. Néanmoins, cette masse n'est pas calculable par les approches perturbatives usuelles<sup>14</sup>, et il semble en outre qu'elle soit

<sup>13</sup>Cette propriété a déjà été évoquée, en relation avec le phénomène d'amortissement de Landau.

<sup>14</sup>Des simulations sur réseau semblent indiquer que cette masse magnétique est effectivement non nulle en QCD.

au plus de l'ordre de  $g^2T$  contrairement aux masses thermiques usuelles qui sont d'ordre  $gT$ . Pour conclure ce paragraphe, on peut dire que la nullité de la masse magnétique à cet ordre du développement perturbatif est susceptible d'entraîner des divergences infrarouges dans le secteur des bosons de jauge transverses.

### 7.6.2 Divergences colinéaires

Une autre source de problèmes dans cette théorie effective est liée au fait que les propagateurs qui entrent dans le calcul des boucles dures sont des propagateurs non massifs. Par conséquent, il est possible d'avoir des divergences colinéaires dans le calcul de l'intégrale angulaire, lorsque certaines lignes externes sont sur le cône de lumière.

Naïvement, si pour une fonction à deux points l'impulsion externe  $K$  est sur le cône de lumière ( $K^2 = 0$ ), l'intégrale angulaire sera de la forme :

$$\int \frac{d\Omega_{\mathbf{p}}}{4\pi} \frac{1}{\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{K}} \propto \int_{-1}^{+1} \frac{d \cos \theta}{k(1 - \cos \theta)} = \infty, \quad (7.40)$$

ce qui conduit à une divergence colinéaire logarithmique.

Une solution a été proposée récemment par FLECHSIG et REBHAN dans l'article [111], qui consiste à calculer les boucles dures en conservant une masse thermique à l'intérieur de la boucle. À l'évidence, les boucles dures ainsi modifiées sont exemptes de toute divergence colinéaire. Ainsi, l'intégrale précédente se trouve modifiée en

$$\int \frac{d\Omega_{\mathbf{p}}}{4\pi} \frac{1}{\tilde{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{K}} \propto \int_{-1}^{+1} \frac{d \cos \theta}{k(\omega_{\mathbf{p}}/p - \cos \theta)} \in \mathbb{R}, \quad (7.41)$$

où  $\tilde{\mathbf{P}} \equiv (\omega_{\mathbf{p}}/p, \hat{\mathbf{p}})$  et  $\omega_{\mathbf{p}} \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ . La masse  $m$  qu'ils proposent d'utiliser pour cette amélioration des boucles dures est la masse thermique asymptotique<sup>15</sup> que l'on obtient pour les excitations dures si l'on effectue la sommation des boucles dures "ordinaires" sur le propagateur. L'intérêt de leur résultat réside dans le fait qu'ils ont montré que l'on pouvait avec ces boucles dures améliorées construire une théorie effective qui est encore invariante de jauge.

L'exemple que j'ai utilisé ici pour illustrer le problème des divergences colinéaires dans les boucles dures est le plus simple qui puisse se concevoir, mais il est un peu trompeur dans la mesure où il exhibe la divergence la plus "faible" possible. En fait, des divergences plus fortes que logarithmiques peuvent surgir

<sup>15</sup>Seuls les modes qui existent aussi à température nulle ont une masse thermique asymptotique non nulle (*i.e.* le mode transverse pour les gluons, et le mode (+) pour les quarks). Cela n'est pas un problème car les autres modes, bien que dépourvus de masse asymptotique, ont par ailleurs un résidu qui est exponentiellement petit dans la région dure, ce qui signifie qu'ils se découplent du secteur dur et qu'ils ne jouent aucun rôle dans le calcul de ces boucles dures améliorées.

dans les vertex effectifs. Ainsi, si on considère une boucle dure à trois points, on pourra rencontrer des intégrales angulaires du type de

$$\int \frac{d\Omega_{\mathbf{p}}}{4\pi} \frac{1}{\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{A}} \frac{1}{\hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{B}} = \frac{1}{2\sqrt{(A \cdot B)^2 - A^2 B^2}} \ln \left[ \frac{A \cdot B + \sqrt{(A \cdot B)^2 - A^2 B^2}}{A \cdot B - \sqrt{(A \cdot B)^2 - A^2 B^2}} \right] \quad (7.42)$$

A partir de là, il est aisé de déterminer la nature des singularités colinéaires que l'on peut rencontrer dans une telle fonction à trois points. On constate tout d'abord que si l'une (et seulement une) des lignes externes est sur le cône de lumière, *i.e.* si  $A^2 = 0$  ou  $B^2 = 0$ , l'argument du logarithme devient soit nul soit infini, ce qui est le signe d'une divergence colinéaire logarithmique. Si les deux impulsions externes  $A$  et  $B$  sont sur le cône de lumière, et ont en outre des composantes spatiales colinéaires (*i.e.*  $\mathbf{a}$  parallèle à  $\mathbf{b}$ ), la racine carrée qui est dans le préfacteur du logarithme s'annule également. Ceci est la signature d'une divergence colinéaire beaucoup plus forte que la précédente. En fait, l'intégrale angulaire étudiée ici possède un pôle double dans une telle configuration, ce qui rend la divergence linéaire plutôt que logarithmique. Naturellement, ces divergences plus fortes sont également régularisées par la procédure de FLECHSIG et REBHAN. Toutefois, une fois cette régularisation effectuée, le vertex effectif que l'on obtient peut prendre des valeurs (finies) considérables au voisinage du point qui rendait singulière la boucle dure non régularisée. C'est ce genre de problème qui sera à l'oeuvre dans le chapitre dédié au taux de production de photons réels.

## 7.7 Limite d'impulsion dure et ordres supérieurs

### 7.7.1 Introduction

Il existe un autre domaine où on peut a priori dire que des corrections d'ordre supérieur vont devoir être apportées aux boucles dures. En effet, regardons par exemple la limite dure du propagateur effectif du quark. Une analyse sommaire de cette question indique que cette limite dure donne le propagateur nu du quark, ce qui est techniquement correct dans le sens suivant :

$$^*S(L) \underset{L \gg gT}{=} S(L) + \mathcal{O}\left(\frac{gT}{L}\right). \quad (7.43)$$

On a une limite d'impulsion dure analogue pour le propagateur effectif du gluon. Un examen superficiel de la situation semble donc indiquer que l'on peut négliger les corrections de boucle dure pour tout propagateur (ou vertex) dans lequel entrent des impulsions dures. Or, ceci n'est strictement vrai que lorsqu'on considère des propagateurs ou vertex isolés. Lorsque ces mêmes objets sont inclus dans un diagramme, les contraintes cinématiques propres au diagramme étudié peuvent rendre certaines corrections de boucle dure indispensables, même si les objets qui subissent ces corrections transportent une impulsion dure.

Une telle situation se produit lorsque la correction de boucle dure fait apparaître un nouveau processus dominant<sup>16</sup> qui ne serait pas là si on utilisait des vertex et propagateurs nus. Cela se produit ainsi avec la discontinuité d'un propagateur dans la région de genre espace, qui n'a pas d'analogue dans la théorie nue.<sup>17</sup> Naturellement, négliger les corrections de boucles dure dans le diagramme qui donne un tel processus le fait purement et simplement disparaître.

### 7.7.2 Processus issus de la région $L^2 < 0$

Un exemple relativement simple où ce problème est visible est fourni par le diagramme à une boucle considéré par BAIER, NAKKAGAWA, NIEGAWA et REDLICH lors du calcul du taux de production de photons réels durs. Il s'agit du diagramme qui apparaît dans l'équation (7.28). Pour des raisons liées aux contraintes cinématiques, la contribution dominante à ce diagramme vient de la région où le quark effectif (coupé) est de genre espace. D'après la figure 7.9, ce diagramme est sensible à la région de l'espace des phases où ce quark est dur, et pourtant on ne peut pas y négliger la correction de boucle dure car c'est d'elle que vient le processus dominant.

On peut comprendre pourquoi une telle situation implique des corrections importantes à l'ordre suivant de façon générique. Ayant à l'esprit la production de photons, considérons à cet effet le diagramme qui apparaît dans le membre de gauche de l'équation (7.44). Le diagramme considéré par BAIER, NAKKAGAWA, NIEGAWA et REDLICH peut donc être vu comme un cas particulier de la situation que je considère ici. Le diagramme considéré ici comporte un propagateur coupé dont l'impulsion est de genre espace, auquel on va s'intéresser en détail, et un nombre indéterminé d'autres propagateurs coupés que je ne considérerai pas.

$$-2n_B(q_o) \left[ \text{Diagramme à une boucle avec un propagateur coupé} \right] = \int_{L^2 < 0} \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} 2\pi\epsilon(k_o)\delta(K^2)2\pi\epsilon(k_o)\delta(2K \cdot L)$$

<sup>16</sup>En effet, il arrive parfois que ce nouveau processus puisse accéder à une portion de l'espace des phases plus grande que les autres processus et soit dominant car la taille de son espace des phases peut compenser le fait qu'il possède au départ un ordre plus élevé dans la constante de couplage. Cette situation apparaîtra dans le chapitre suivant avec le bremsstrahlung, qui devrait normalement n'arriver dans le tenseur de polarisation du photon qu'à trois boucles, mais qui arrive en fait à deux boucles par le biais d'une correction de boucle dure.

<sup>17</sup>C'est aussi le cas lorsqu'on regarde la discontinuité d'un vertex effectif, qui est non nulle si certaines de ses impulsions externes sont de genre espace. Toutefois, afin de simplifier la discussion, je me limiterai au cas d'un propagateur.

$$\times 2n_F(l_o)n_B(k_o)(1 - n_F(k_o)) \quad \times \quad \text{Diagram} \quad . \quad (7.44)$$

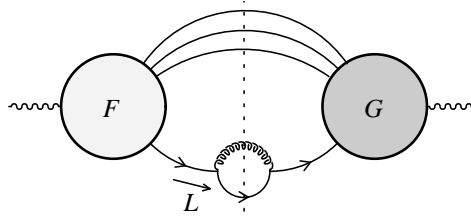
Pour prouver cette relation, on peut utiliser les règles de coupure du formalisme retardé-avancé et s'inspirer de la justification donnée pour la formule (6.2), ce qui permet tout d'abord d'écrire le premier membre sous la forme intermédiaire

$$- 2n_B(q_o)[\dots] = n_F(l_o) F \text{ Disc } (*S^{AR}(L)) G^* . \quad (7.45)$$

A partir de là, il suffit d'utiliser la relation (7.21) et la discontinuité de l'équation (7.13) pour arriver à la relation annoncée.<sup>18</sup>

On voit tout d'abord que le fait que le propagateur effectif ait une discontinuité non nulle dans la région de genre espace permet d'inclure des processus qui ne seraient apparus qu'à l'ordre suivant si on utilisait un propagateur nu (voir également la relation (7.21)), dans le diagramme représenté sur la figure 7.11.

FIG. 7.11 – Diagramme de la théorie nue donnant les mêmes processus.



### 7.7.3 Conséquences de l'approximation de boucle dure

Il est également clair que le fait que  $\Sigma_{HTL}^{RA}(L)$  soit calculée avec l'approximation de boucle dure entraîne de sérieuses simplifications au niveau de la cinématique des processus qui entrent dans le second membre de l'équation (7.44). Ainsi, après avoir absorbé le gluon d'impulsion  $K$ , le quark devrait avoir l'impulsion  $K + L$ ; mais l'approximation de boucle dure implique que cela est remplacé par  $K$ . Des approximations apparaissent aussi au niveau des poids statistiques, et de l'argument des distributions  $\delta(\cdot)$ , par rapport au traitement exact des processus impliqués dans le membre de droite.<sup>19</sup> De façon à peu près évidente, ces approximations sont très inexactes lorsque l'impulsion  $L$  devient dure, ce qui est parfois autorisé par la cinématique.

<sup>18</sup>On a également besoin de l'identité  $n_B(k_o) + n_F(k_o) = 2n_B(k_o)[1 - n_F(k_o)]$ .

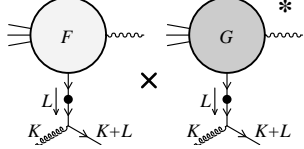
<sup>19</sup>Il est immédiat de vérifier que toutes ces approximations sont légitimes lorsque  $L \ll T$ .



### 7.7.4 Calcul correct de ces processus

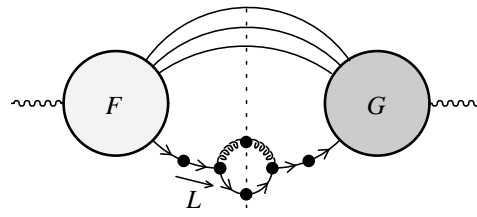
En effet, si l'on ne fait aucune approximation pour les processus en question, le membre de droite de l'équation (7.44) devrait être remplacé par

$$\int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} 2\pi\epsilon(k_o)\delta(K^2)2\pi\epsilon(k_o + l_o)\delta(2K \cdot L + L^2) \times n_B(k_o)(1 - n_F(k_o + l_o))$$


(7.46)

Dans ce cas, on va avoir une contribution importante du terme comportant une boucle de plus représenté sur la figure 7.12. Naturellement, il faut soit utiliser

FIG. 7.12 — Contribution à prendre en compte si  $L$  devient dur.



une borne entre les échelles molle et dure, soit soustraire un contre-terme, pour éviter tout double comptage.

On peut donc conclure cette section par l'assertion générale suivante : *si un diagramme reçoit une contribution importante de la discontinuité d'un propagateur effectif dans la région de genre espace lorsque l'impulsion portée par ce propagateur devient dure, alors le calcul doit être complété par un diagramme d'ordre supérieur*. En d'autres termes, la sommation des boucles dures fait apparaître certains processus un ordre avant leur apparition dans la théorie nue, mais en donne une mauvaise approximation si des impulsions dures sont mises en jeu, de sorte qu'on n'évite pas de regarder l'ordre suivant.

### 7.7.5 Nouveaux processus

En outre, ce qui s'est produit avec le propagateur effectif du quark risque de se reproduire à l'ordre suivant avec le gluon d'impulsion  $K$  ou le quark d'impulsion  $K + L$  puisqu'ils sont coupés et qu'on utilise des propagateurs effectifs. Ainsi, si on garde la contribution  $K^2 < 0$  pour le propagateur effectif du gluon,

on aura un processus du type de

$$(7.47)$$

C'est précisément ce que nous allons constater avec le bremsstrahlung dans le chapitre suivant. On peut en fait se convaincre assez facilement de l'importance de ces nouvelles contributions par un comptage de puissance rudimentaire. Il suffit pour cela de regarder la discontinuité de la self-énergie du quark à une boucle, avec un gluon effectif dont on garde la contribution en dessous du cône de lumière. Comme c'est lorsque  $L$  est dur qu'on va être amené à considérer cette boucle, on peut simplifier le diagramme correspondant, pour ne garder que celui qui est représenté dans le premier membre de l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \propto g^2 \int d^4 K [n_B(k_o) + n_F(k_o + l_o)] [\gamma_\sigma(\not{K} + \not{L}) \gamma_\rho] \\ & \quad \times \rho_{T,L}(K) P_{T,L}^{\rho\sigma}(K) \epsilon(k_o + l_o) \delta((K + L)^2) \\ & \underset{K^2 < 0}{\sim} g^2 T \int^T k dk \left[ \frac{1}{k^2 + m^2} - \frac{Z_{T,L}}{\omega_{T,L}^2(k)} \right] \sim \frac{L}{T} \mathfrak{Z}_{HTL}(L) . \end{aligned} \quad (7.48)$$

Pour obtenir l'estimation de la deuxième ligne, on utilise la distribution  $\delta((K + L)^2)$  pour faire l'intégration sur l'angle  $\theta'$  entre les vecteurs  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{l}$ . Ensuite, on utilise les règles de somme de l'appendice C. Dans le résultat donné plus haut,  $m^2$  est la masse de DEBYE. Pour la contribution du gluon transverse, cette quantité est donc nulle. Toutefois, si  $L^2$  est strictement positif, il n'y aura pas de divergence infrarouge. En effet, le cosinus de l'angle  $\theta'$ , égal à  $\cos \theta' = (L^2 + 2k_o l_o + K^2)/(2kl)$ , deviendrait infini dans la limite  $k \rightarrow 0$ .<sup>20</sup>

On constate donc que cette correction au propagateur du quark est comparable à celle qui est due aux boucles dures, lorsque l'impulsion  $L$  du quark est dure. C'est donc une indication de l'importance des nouveaux processus de (7.47), ainsi que du caractère insuffisant de la sommation des boucles dures.

<sup>20</sup>Lorsque  $L^2 = 0$ , on a donc une divergence logarithmique pour la contribution du gluon transverse.

## Chapitre 8

# Production de photons statiques

Preocupado por este asunto  
me dedicué a aclarar las cosas.  
Busqué a los sabios sacerdotes,  
los esperé despues del rito,  
los aceché cuando salían  
a visitar a Dios y al Diablo.  
Se aburrieron con mis preguntas.  
Ellos tampoco sabían mucho,  
eran sólo administradores.

PABLO NERUDA  
*Y cuánto vive ?, Estravagario*

**U**ne des toutes premières applications de la théorie effective issue de la sommation des boucles dures a été le calcul du taux de production de photons statiques par un plasma de quarks et de gluons, effectué en 1990 par BRAATEN, PISARSKI et YUAN dans l'article [112].

D'un point de vue physique, le taux de production qu'ils ont obtenu était dû pour une part à des processus tels que l'annihilation de deux quasi-particules, ou encore la transition entre le mode (+) et le mode (−) de la relation de dispersion des quarks thermalisés. A coté de cela se trouvaient des processus correspondant au fait que les propagateurs effectifs ont une discontinuité non nulle dans la région de genre espace. Le taux de production total qu'ils ont obtenu était largement supérieur au taux qui avait été jusque là obtenu à une boucle dans la théorie nue, justifiant ainsi la nécessité de sommer les boucles dures par le fait que des contributions importantes se trouvaient dans les ordres supérieurs de la théorie nue.

Toutefois, leur calcul effectué à une boucle dans la théorie effective présente pour certains termes une sensibilité importante vis à vis des impulsions dures circulant dans la boucle de quarks. Comme cela concerne la contribution issue de la discontinuité du propagateur effectif dans la région de genre espace, il y a tout lieu de penser que l'approximation de boucle dure donne un résultat incomplet en vertu de la discussion effectuée dans le chapitre précédent. Cette particularité peut donc être vue comme une indication sérieuse de la nécessité de calculer certaines corrections à deux boucles.

Dans ce chapitre, je calcule les corrections à deux boucles au taux de production de photons statiques. Comme annoncé, il apparaît dans ces diagrammes des contributions aussi importantes que celles qui avaient été obtenues par BRAATEN, PISARSKI et YUAN à une boucle. Je commencerai ce chapitre par un bref rappel du calcul à une boucle, en mettant l'accent sur les termes qui présentent une sensibilité importante aux impulsions dures. En effet, il est important d'avoir un bon contrôle de ces termes, car c'est d'eux que peut venir un éventuel double comptage avec les corrections à deux boucles.

Je consacrerai ensuite une section à une discussion préliminaire des diagrammes à deux boucles que nous avons considéré. Je donnerai la forme de l'élément de matrice, ainsi que les restrictions qu'entraînent les contraintes cinématiques sur l'espace des phases. Ensuite, je considérerai les corrections apportées par ces diagrammes à deux boucles à des processus existant déjà à une boucle. Comme annoncé par la sensibilité du calcul à une boucle aux impulsions dures, ces corrections ne peuvent pas être négligées.

Je m'intéresserai enfin aux contributions à deux boucles qui correspondent au bremsstrahlung. Il s'agira ici de contributions totalement nouvelles qui n'apparaissent pas avant deux boucles. Il s'agit d'un travail qui a été publié dans l'article [113]. Je montrerai qu'elles sont essentielles dans la région du spectre qui concerne les photons de basse énergie. Je donnerai également un argument basé sur le volume de l'espace des phases rendant plus intuitif le fait que des contributions qui n'apparaissent qu'à deux boucles puissent être aussi importantes que les contributions à une boucle.

## 8.1 Quelques aspects du calcul à une boucle

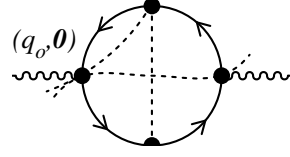
### 8.1.1 Diagramme

BRAATEN, PISARSKI et YUAN ont considéré la contribution du diagramme de la figure 8.1 au taux de production de photons virtuels statiques par un plasma de quarks et de gluons. Considérer des photons statiques présente ici deux avantages sur le plan technique. Tout d'abord, de tels photons sont virtuels (ils sont supposés se désintégrer ultérieurement en une paire de leptons) et ne sont par conséquent pas susceptibles d'occasionner des divergences colinéaires. Ensuite, d'un point de vue purement calculatoire, le fait que la tri-impulsion du photon soit nulle entraîne des simplifications importantes au niveau de la cinématique des processus considérés. Le taux de production de photons virtuels

---

FIG. 8.1 – Diagramme à une boucle dans la théorie effective.

---



non statiques a été calculé par WONG dans [114], et à l'évidence les calculs deviennent beaucoup plus lourds.

### 8.1.2 Processus physiques

Trois types de coupures, représentées sur la figure 8.1, sont possibles pour obtenir la contribution de ce diagramme à la partie imaginaire du tenseur de polarisation du photon. Chaque fois qu'un des propagateurs effectifs de quark est coupé, on peut recevoir trois types de contributions : une contribution correspondant à la couche de masse du mode (+), une contribution correspondant à la couche de masse du mode (−) (celle ci est exponentiellement supprimée si l'impulsion correspondante devient dure), et une contribution venant de la région de genre espace. Si un vertex effectif est coupé, on peut facilement déterminer les processus correspondants en remplaçant ce vertex effectif par la boucle dure correspondante.

Ce faisant, les processus physiques que l'on trouve peuvent être classés en plusieurs catégories. Tout d'abord, on a les processus impliquant deux quarks réels et un photon, représentés sur la figure 8.2, qui peuvent être du type  $q_{\pm}\bar{q}_{\pm} \rightarrow \gamma$  ou bien  $q_{+} \rightarrow q_{-}\gamma$ .

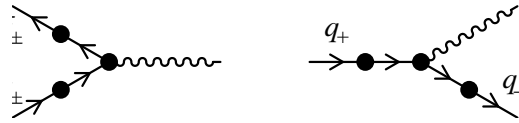


FIG. 8.2 – Processus impliquant deux quarks réels.

---

On y trouve également des processus du type de  $q_{\pm}\bar{q}_{\pm} \rightarrow g\gamma$  et  $q_{\pm}g \rightarrow q_{\pm}\gamma$  (effet Compton), représentés sur la figure 8.3.

Enfin, on a des processus impliquant deux quarks et deux gluons, du type de  $q_{\pm}\bar{q}_{\pm} \rightarrow gg\gamma$  et  $q_{\pm}g \rightarrow q_{\pm}g\gamma$ , qui sont quant à eux représentés sur la figure 8.4.

A l'exception du photon externe, les lignes externes sur lesquelles ne figure pas de point noir indiquent qu'il s'agit d'un quark ou d'un gluon obtenus en

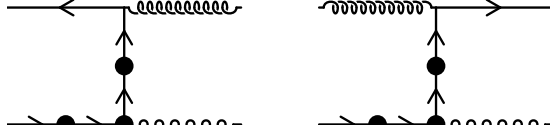


FIG. 8.3 – Processus  $q\bar{q} \rightarrow g\gamma$  et  $qg \rightarrow q\gamma$ .

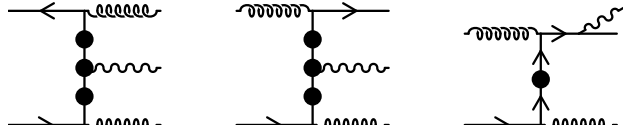


FIG. 8.4 – Processus  $q\bar{q} \rightarrow gg\gamma$  et  $qg \rightarrow qg\gamma$ .

couplant au travers d'une boucle dure. Cela signifie que l'approximation avec laquelle ces lignes sont traitées devient mauvaise si la particule virtuelle qui s'y rattache devient dure (voir la discussion de la section 7.7). Si cela s'avère être le cas, on peut prédire que les processus correspondants recevront des contributions importantes des diagrammes à deux boucles. Par contre, on peut dire que les processus de la figure 8.2 sont vraisemblablement complets et ne vont recevoir que des corrections sous-dominantes.

### 8.1.3 Résultats

Dans l'article de BRAATEN, PISARSKI et YUAN, les contributions sont classées en “pôle-pôle”, “pôle-cut” et “cut-cut”, suivant la partie que l'on considère (contribution des pôles, ou partie de genre espace) dans les propagateurs coupés. – Les contributions “pôle-pôle” présentent une structure très riche, avec des seuils et des pics caractéristiques. Cela correspond aux processus de la figure 8.2.

– Les contributions “pôle-cut” et “cut-cut”, correspondant aux processus des figures 8.3 et 8.4, donnent quant à elles un continuum, sans structure remarquable. Par ailleurs, ce continuum domine assez largement les structures exhibées par les contributions “pôle-pôle”, ce qui fait que ces dernières ne peuvent pas être observées.

Plus intéressant dans l'optique du calcul à deux boucles que nous allons faire plus tard sont les termes du diagramme à une boucle qui sont sensibles à un quark aussi bien mou que dur, ce qui engendre un logarithme dont l'argument est le rapport de la température par une quantité molle. Ces contributions sont assez faciles à extraire par comptage de puissance dans la formule (11) de l'article

[112]. On en trouve une dans les contributions “cut-cut”, qui donne

$$\text{Im } \Pi^{\text{RA}}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) \approx -\frac{e^2 g^2 N C_F}{32\pi} \frac{m_F^2 T}{q_o} \ln \left( \frac{T^2}{m_F^2} \right), \quad (8.1)$$

où  $m_F^2 \equiv g^2 C_F T^2/8$  est la masse thermique d’un quark mou. On en a également une parmi les contributions de type “pôle-cut” qui vaut

$$\text{Im } \Pi^{\text{RA}}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) \approx -\frac{e^2 g^2 N C_F}{32\pi} q_o T \ln \left( \frac{2q_o T}{\text{Max}(q_o^2, m_F^2)} \right). \quad (8.2)$$

Ce résultat sera justifié indirectement dans la section 8.3.2.

Ces termes présentant une sensibilité vis à vis de la région dure risquent donc de recevoir des corrections importantes des diagrammes à deux boucles.

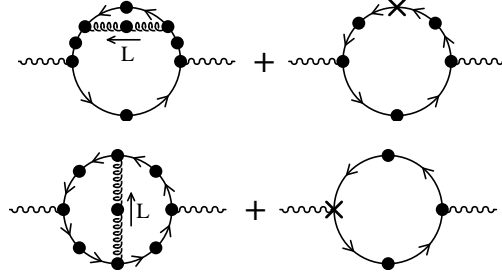
## 8.2 Généralités sur les diagrammes à deux boucles

### 8.2.1 Topologies

Dans la section précédente, nous avons vu que des contributions à deux boucles vont vraisemblablement être importantes. Parmi ces contributions, se trouvent évidemment les diagrammes représentés sur la figure 8.5. Toutefois, on

FIG. 8.5 – Diagrammes à deux boucles apportant une correction au calcul à une boucle.

Ces diagrammes doivent être accompagnés de contre-termes pour éviter les double comptages.



doit également s’assurer que le tenseur de polarisation du photon obtenu avec ces diagrammes est transverse :

$$Q_\mu \Pi^{\mu\nu}(q_o, \mathbf{q}) = 0. \quad (8.3)$$

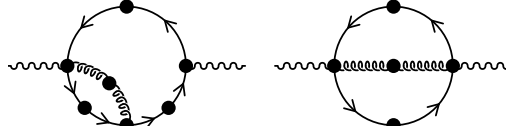
La vérification de la transversalité de ce tenseur s’appuie sur l’identité de WARD qui lie le vertex  $\gamma q\bar{q}$  à une boucle dans la théorie effective et la self-énergie du quark à une boucle. Or, dans la théorie effective, du fait de la dépendance vis à vis des impulsions des vertex effectifs, il est nécessaire d’inclure plus de termes afin de satisfaire cette identité de WARD. Diagrammatiquement, l’identité de

WARD habituelle dans la théorie nue à une boucle est remplacée dans la théorie effective par la relation représentée sur la figure suivante

$$Q^\mu \cdot \left[ \begin{array}{c} \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \end{array} \right] = \text{Diagram 4} - \text{Diagram 5} \quad (8.4)$$

La structure de cette identité de WARD nous indique donc que l'on doit également considérer les topologies représentées sur la figure 8.6 afin d'assurer la transversalité du tenseur de polarisation du photon à cet ordre.

FIG. 8.6 – Topologies à deux boucles nécessaires pour rendre  $\Pi^{\mu\nu}(Q)$  transverse.



Toutefois, la situation est en pratique un peu plus simple que cela. En effet, le diagramme à une boucle a besoin d'être corrigé par des topologies à deux boucles lorsque l'impulsion des quarks circulant dans la boucle devient dure. Cela signifie qu'on peut ignorer a priori toutes les décorations de boucle dure le long de la boucle de quarks dans les diagrammes à deux boucles.<sup>1</sup> Lorsque les quarks et les vertex auxquels ils se rattachent sont tous nus, l'identité de WARD satisfaite par le vertex  $\gamma q \bar{q}$  devient très similaire à celle que l'on connaît dans la théorie nue :

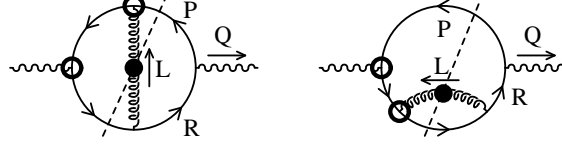
$$Q^\mu \cdot \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} \quad (8.5)$$

ce qui est en accord avec le fait que le vertex effectif  $\gamma g q \bar{q}$  qui apparaît dans les diagrammes de la figure 8.6 n'a pas d'analogue dans la théorie nue, ce qui fait que ces diagrammes ne contribuent pas lorsque le quark est dur. Ceci permet d'avoir un tenseur de polarisation transverse tout en limitant l'étude aux deux diagrammes simplifiés de la figure 8.7. C'est à l'étude de ces deux diagrammes, et des contre-terme éventuels qui les accompagnent, que je vais consacrer le reste de ce chapitre.

<sup>1</sup>Ce faisant, on exclut les processus nouveaux qui pourraient arriver avec la discontinuité du propagateur ou du vertex effectif du quark dans la région de genre espace. Comme notre but ici est de regarder d'abord les corrections à des processus déjà existants à une boucle, cette limitation n'est pas trop importante.



FIG. 8.7 – Version simplifiée des diagrammes à deux boucles lorsque le quark est dur.



### 8.2.2 Éléments de matrice

Je vais maintenant donner l'expression de la contribution de ces deux diagrammes à la partie imaginaire du tenseur de polarisation retardé du photon. Pour ce faire, je vais utiliser les règles de coupure établies dans la section 4.6. Il y a en principe plusieurs coupures pour chacun des deux diagrammes, mais seules celles qui ont été représentées sur la figure 8.7 contribuent de façon importante.<sup>2</sup> En effet, les coupures qui ne traversent pas le propagateur du gluon imposent des contraintes beaucoup plus drastiques sur la cinématique. En particulier, elles imposent au quark d'être mou, ce qui réduit considérablement le volume accessible dans l'espace des phases, et donnerait une contribution sous dominante.

Dans le cas du premier diagramme de la figure 8.7, ces règles de coupure donnent immédiatement

$$\begin{aligned}
 \text{Im } \Pi^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q})|_{\text{vertex}} &= -\text{Im } \Pi^{AR}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q})|_{\text{vertex}} \\
 &= \frac{NC_F}{2} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} {}^*D^{AR}_{\rho\sigma}(L) \\
 &\times e^{ARR}(Q, P+L, -R-L) g^{ARR}(-P-L, P, L) \\
 &\times g^{AAR}(R+L, -L, -R) e^{AAR}(R, -P, -Q) \\
 &\times \text{Tr} \left[ \gamma^{\mu} S^{AR}(P+L) \gamma^{\rho} S^{AR}(P) \gamma_{\mu} S^{RA}(R) \gamma^{\sigma} S^{RA}(R+L) \right]. \quad (8.6)
 \end{aligned}$$

Si on rappelle que les vertex soulignés sont simplement opposés aux vertex non soulignés correspondants, ainsi que les relations

$$S^{AR} = -S^A \quad (8.7\text{-a})$$

$$S^{AR} = S^R - S^A \quad (8.7\text{-b})$$

$$S^{RA} = S^A - S^R \quad (8.7\text{-c})$$

$${}^*D^{AR}_{\rho\sigma} = {}^*D^R_{\rho\sigma} - {}^*D^A_{\rho\sigma}, \quad (8.7\text{-d})$$

cela donne

$$\text{Im } \Pi^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q})|_{\text{vertex}} =$$

<sup>2</sup>Pour le diagramme de self-énergie, les deux autres coupures non représentées sont importantes si l'on envisage de faire tendre vers zéro les masses thermiques. Ces coupures servent alors à compenser certaines divergences infrarouges qui réapparaissent dans cette limite.

$$\begin{aligned}
&= -\frac{NC_F}{2}e^2g^2 \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4L}{(2\pi)^4} \left[ {}^*\Delta_{T,L}^R(L) - {}^*\Delta_{T,L}^A(L) \right] \\
&\times \left[ \Delta^R(P) - \Delta^A(P) \right] \left[ \Delta^R(R+L) - \Delta^A(R+L) \right] \\
&\times (n_F(r_o) - n_F(p_o)) (n_B(l_o) + n_F(r_o + l_o)) \\
&\times \Delta(R)\Delta(P+L)P_{\rho\sigma}^{T,L}(L) \text{Tr} [\gamma_\mu \not{R} \gamma^\rho (\not{R} + \not{L}) \gamma^\mu (\not{P} + \not{L}) \gamma^\sigma \not{P}] , \quad (8.8)
\end{aligned}$$

où je note

$$\begin{aligned}
S^{R,A}(P) &\equiv \not{P} \Delta^{R,A}(P) \\
\Delta^{R,A}(P) &\equiv \frac{i}{P^2 \pm ip_o \varepsilon}
\end{aligned} \quad (8.9)$$

pour le propagateur nu du quark,<sup>3</sup> et

$$\begin{aligned}
-{}^*D_{\rho\sigma}^{R,A} &\equiv P_{\rho\sigma}^T(L) {}^*\Delta_T^{R,A}(L) + P_{\rho\sigma}^L(L) {}^*\Delta_L^{R,A}(L) + \xi L_\rho L_\sigma / L^2 \\
{}^*\Delta_{T,L}^{R,A}(L) &\equiv \frac{i}{L^2 - \Pi_{T,L}^{HTL}(L)} \Big|_{R,A} , \quad (8.10)
\end{aligned}$$

pour le propagateur effectif du gluon.<sup>4</sup>  $\xi$  est le paramètre de jauge.

On obtient de manière identique le résultat suivant pour le deuxième diagramme de la figure 8.7 :

$$\begin{aligned}
\text{Im } \Pi^{RA}{}_\mu{}^\mu(q_o, \mathbf{q})|_{\text{self}} &= -\text{Im } \Pi^{AR}{}_\mu{}^\mu(q_o, \mathbf{q})|_{\text{self}} \\
&= \frac{NC_F}{2} \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4L}{(2\pi)^4} {}^*D_{\rho\sigma}^{AR}(L) \\
&\times e^{\overline{ARR}}(Q, P, -R) g^{\overline{ARR}}(R, L, -R - L) \\
&\times g^{\overline{AAR}}(R + L, -L, -R) e^{\overline{AAR}}(R, -P, -Q) \\
&\times \text{Tr} \left[ \gamma^\mu S^{\overline{AR}}(P) \gamma_\mu S^{\overline{RA}}(R) \gamma^\rho S^{\overline{RA}}(R + L) \gamma^\sigma S^{\overline{RA}}(R) \right] \\
&= -\frac{NC_F}{2}e^2g^2 \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4L}{(2\pi)^4} \left[ {}^*\Delta_{T,L}^R(L) - {}^*\Delta_{T,L}^A(L) \right] \\
&\times \left[ \Delta^R(P) - \Delta^A(P) \right] \left[ \Delta^R(R+L) - \Delta^A(R+L) \right] \\
&\times (n_F(r_o) - n_F(p_o)) (n_B(l_o) + n_F(r_o + l_o)) \\
&\times (\Delta(R))^2 P_{\rho\sigma}^{T,L}(L) \text{Tr} [\gamma_\mu \not{R} \gamma^\rho (\not{R} + \not{L}) \gamma^\sigma \not{R} \gamma^\mu \not{P}] . \quad (8.11)
\end{aligned}$$

<sup>3</sup>Je suppose ici que toutes les contributions issues de ces diagrammes sont dominées par la région de l'espace des phases où le quark circulant dans la boucle est dur. Nous verrons cependant qu'il existe une contribution qui est sensible aussi bien aux quarks durs qu'aux quarks mous. Afin de ne pas avoir de divergence infrarouge dans cette contribution, il sera nécessaire de conserver une masse thermique pour les quarks.

<sup>4</sup>Les fonctions  $\Pi_{T,L}^{HTL}$  sont données par les équations (7.37).

Dans les formules (8.8) et (8.11), la notation  $\Delta(P)$ , sans indice  $R$  ou  $A$ , indique que la prescription retardée ou avancée est indifférente. Cela est dû aux distributions  $\delta(\cdot)$  venant des quarks coupés, qui font que seule contribue la partie principale des propagateurs restants.

On peut ensuite donner l'expression des traces de matrices de DIRAC qui apparaissent dans ces éléments de matrice :

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma_\mu \not{R} \gamma_\rho (\not{R} + \not{L}) \gamma_\sigma \not{R} \gamma^\mu \not{P}] &= \\ &= -4 \left[ 4R^2 Q_\rho R_\sigma - 4Q^2 R_\rho R_\sigma \right. \\ &\quad \left. - g_{\rho\sigma} (R^2(R^2 - Q^2) + 2R^2 Q \cdot L - 2Q^2 R \cdot L) \right] \end{aligned} \quad (8.12)$$

et

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma_\mu \not{R} \gamma^\rho (\not{R} + \not{L}) \gamma^\mu (\not{P} + \not{L}) \gamma^\sigma \not{P}] &= \\ &= -4 \left[ 2(R^2 + (R + L)^2) P_\rho Q_\sigma - 2(P^2 + (P + L)^2) R_\rho Q_\sigma \right. \\ &\quad + 2L^2 (R_\rho R_\sigma + P_\rho P_\sigma) - 4Q^2 R_\rho P_\sigma \\ &\quad + g_{\rho\sigma} (P^2 R^2 + (P + L)^2 (R + L)^2 \\ &\quad \left. - L^2 (P^2 + R^2 + (P + L)^2 + (R + L)^2 - Q^2 - L^2)) \right]. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Afin de les simplifier, j'ai anticipé l'usage des identités  $L_\rho P_{T,L}^{\rho\sigma}(L) = 0$  pour éliminer certains termes qui donneront une contribution nulle à un stade ultérieur du calcul.<sup>5</sup>

Signalons également que je m'attacherai uniquement à l'extraction analytique des termes exhibant un grand logarithme. De tels termes sont assez faciles à isoler par un simple comptage de puissances, et sont en plus calculables analytiquement. Ces termes logarithmiques dominent devant les autres termes dans la limite où la constante de couplage est petite. En effet, leur argument est usuellement le rapport d'une échelle dure par une échelle molle, ce qui donne à ces logarithmes l'ordre de grandeur  $\ln(1/g)$ . Lorsque  $L^2 < 0$ , il est possible de vérifier que les seuls termes logarithmiques qui soient dominants viennent de la correction de vertex, via

$$-8L^2(R_\rho R_\sigma + P_\rho P_\sigma). \quad (8.14)$$

Dans ce terme, nous verrons que le logarithme vient de l'intégration sur l'impulsion  $L$  du gluon. Dans le cas où on retient au contraire la partie "pôle" du gluon coupé,  $L^2$  reste d'ordre  $m_g^2 \sim g^2 T^2$ , ce qui fait que ce terme ne peut plus donner de logarithme. Par contre, par comptage de puissances, on peut voir que de grands logarithmes seront obtenus dans le terme en

$$4g_{\rho\sigma}(R^2 R^2 + 2R^2(Q \cdot L)), \quad (8.15)$$

---

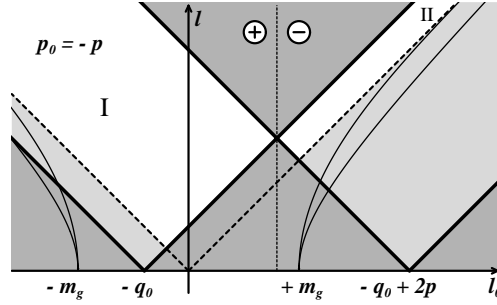
<sup>5</sup>La contrepartie de cette simplification est qu'on ne peut plus utiliser ces expressions pour vérifier l'indépendance du résultat vis à vis du paramètre de jauge  $\xi$ . En effet, le projecteur correspondant à la partie dépendante de jauge du propagateur du gluon ne s'annule pas par contraction avec  $L_\rho$ .

issu de la correction de self-énergie. On peut également vérifier que pour le terme en  $R^2 R^2$ , l'intégrand est dominé par des quarks durs et le logarithme vient de l'intégration sur l'impulsion  $L$  du gluon, alors que pour le terme en  $R^2 Q \cdot L$ , l'intégrand est dominé par un gluon dur et le logarithme vient de l'intégration sur l'impulsion des quarks.

Comme le mode  $(-)$  pour un quark effectif, ainsi que le mode longitudinal pour un gluon effectif, ne contribuent à la discontinuité que dans la région molle (le résidu associé à ces modes s'annule exponentiellement dans la région dure), ces modes n'ont pas à être considérés dans toutes les situations où les modes durs sont importants. Ceci est systématiquement le cas ici, puisque l'intégration sur les impulsions des quarks et gluon coupés est soit dominée par la région dure, soit logarithmiquement sensible à la région dure.<sup>6</sup>

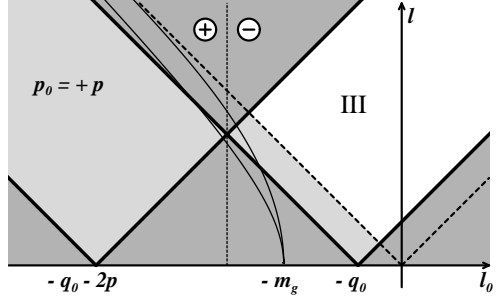
### 8.2.3 Espace des phases

FIG. 8.8 – Domaines autorisés dans le plan  $(l_o, l)$ , pour  $p_o = -p$ . La région en gris foncé est exclue par les contraintes imposées par les fonctions  $\delta(\cdot)$ . La région en gris clair est autorisée et se trouve dans la région de genre temps (les courbes sont les relations de dispersion du gluon effectif). La région en blanc est également autorisée et se trouve dans la partie de genre espace.



Domaines autorisés dans le plan  $(l_o, l)$  lorsque  $p_o = p$ .

Sur les deux figures, la ligne verticale en pointillés est la frontière entre  $\epsilon(p_o)\epsilon(r_o + l_o) = +1$  et  $\epsilon(p_o)\epsilon(r_o + l_o) = -1$ .



Les propagateurs coupés de quarks sont des distributions  $\delta(\cdot)$  qui engendrent des restrictions sur l'espace des phases. De la distribution  $\Delta^R(P) - \Delta^A(P) =$

<sup>6</sup>A l'évidence, les modes qui disparaissent exponentiellement dans la région dure ne peuvent pas contribuer à un logarithme qui résulte d'une intégrale s'étendant des échelles molles jusqu'aux échelles dures.

$2\pi\epsilon(p_o)\delta(P^2)$ , on extrait les valeurs  $p_o = \pm p$  et  $r_o = q_o \pm p$ .<sup>7</sup> Au second quark coupé est associé la distribution  $\Delta^R(R+L) - \Delta^A(R+L) = 2\pi\epsilon(r_o + l_o)\delta((R+L)^2)$ , de laquelle on peut extraire le cosinus de l'angle  $\theta'$  entre  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{l}$  :

$$\cos \theta' = \frac{(r_o + l_o)^2 - p^2 - l^2}{2pl} . \quad (8.16)$$

On doit en outre exiger que cette quantité soit comprise entre  $-1$  et  $+1$ , comme il se doit pour un cosinus, ce qui va réduire les régions autorisées de l'espace des phases. On peut aisément vérifier que la condition  $-1 \leq \cos \theta' \leq 1$  est équivalente aux deux inégalités suivantes

$$(l_o - l + p_o + q_o - p)(l_o + l + p_o + q_o + p) \leq 0 \quad (8.17\text{-a})$$

$$(l_o - l + p_o + q_o + p)(l_o + l + p_o + q_o - p) \geq 0 . \quad (8.17\text{-b})$$

Ces inégalités délimitent dans le plan  $(l_o, l)$  un domaine dont les frontières sont des demi-droites. Les régions exclues par ces inégalités sont représentées en gris foncé sur la figure 8.8.

Une fois que ces contraintes ont été prises en compte, il ne reste que trois variables indépendantes, qui peuvent être par exemple  $r = p$ ,  $l_o$  et  $l$ . Toutes les autres quantités peuvent ensuite être exprimées au moyen de ces trois là. C'est le cas en particulier des dénominateurs qui apparaissent dans les formules (8.8) et (8.11) :

$$R^2 = q_o(q_o \pm 2p) \quad (8.18\text{-a})$$

$$(P + L)^2 = -q_o(q_o + 2l_o \pm 2p) , \quad (8.18\text{-b})$$

où le signe  $+$  correspond à  $p_o = +p$  et le signe  $-$  à  $p_o = -p$ .

## 8.3 Processus impliquant un gluon de genre temps

### 8.3.1 Processus

Les processus qui contribuent à la production de photons statiques dans ces diagrammes à deux boucles peuvent se diviser en deux grandes classes : ceux qui impliquent les pôles du gluon coupé, et ceux qui impliquent un gluon coupé de genre espace.

Commençons par les premiers. Le support de ces processus dans le plan  $(l_o, l)$  est situé dans la région en gris clair sur la figure 8.8. Plus précisément, leur support est l'intersection de la région en gris clair avec les courbes de dispersion du gluon effectif. C'est dans cette région qu'on trouve les corrections aux processus qui apparaissent déjà à une boucle dans le calcul de BRAATEN, PISARSKI et YUAN. Il faudra donc prendre garde à bien soustraire les contre-terms pour éviter les double comptages.

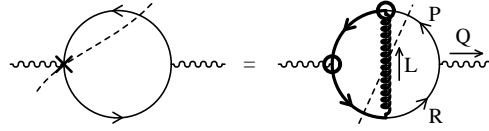
---

<sup>7</sup>Puisque le tri-vecteur  $\mathbf{q}$  est nul, on a  $r = p$ .

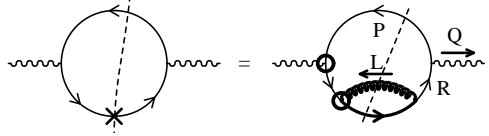
### 8.3.2 Contribution des contre-terms

Commençons donc par les contre-terms. Comme des simplifications ont été faites sur les diagrammes à deux boucles de la figure 8.5, il faut faire a priori les mêmes simplifications sur les deux diagrammes avec contre-terms pour être cohérent. Cela donne les diagrammes de la figure 8.9.

FIG. 8.9 – Version simplifiée des diagrammes contenant un contre-terme. Les boucles en gras doivent être calculées avec les approximations de boucle dure. En haut : contre-terme de vertex.



En bas : contre-terme de self-énergie.



Si on néglige les masses thermiques des quarks (de ceux qui ne font pas partie de la boucle correspondant au contre-terme), la contribution du contre-terme de vertex peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^{RA}{}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) &= -\frac{e^2 g^2 N C_F}{2} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \\ &\times 2\pi\epsilon(l_o)\delta(L^2)2\pi\epsilon(\mathbf{r}_o + l_o)\delta(\mathbf{R}^2 + 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{L} + L^2)2\pi\epsilon(p_o)\delta(P^2) \\ &\times [n_F(p_o) - n_F(r_o)][n_B(l_o) + n_F(\mathbf{r}_o + l_o)] \frac{i}{R^2} \frac{i}{\mathbf{P}^2 + 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{L} + L^2} \\ &\times -g_{\rho\sigma} \text{Tr} [\mathbf{P} \gamma_{\mu} \mathbf{R} \gamma^{\rho} (\mathbf{R} + \mathbf{L}) \gamma^{\mu} (\mathbf{P} + \mathbf{L}) \gamma^{\sigma}] , \end{aligned} \quad (8.19)$$

où toutes les quantités écrites en gras dans le second membre sont les termes qu'on néglige en faisant l'approximation de boucle dure dans la boucle qui correspond au contre-terme. Faisant cette approximation, et tenant compte des distributions  $\delta(\cdot)$ , on voit que la trace de matrices de DIRAC du numérateur devient

$$4\text{Tr} [\mathbf{P} \mathbf{L} \mathbf{R} \mathbf{L}] = 32(\mathbf{R} \cdot \mathbf{L})(\mathbf{P} \cdot \mathbf{L}) = 0 . \quad (8.20)$$

Cela signifie que le contre-terme de vertex donne une contribution nulle. Une remarque s'impose toutefois : ce résultat n'est a priori valide que dans la jauge de FEYNMAN pour le gluon. Par ailleurs, on n'aurait pas eu strictement zéro si on avait conservé les masses thermiques des quarks effectifs, mais le résultat qu'on aurait obtenu aurait de toutes façons été sous-dominant.

Anticipant le fait que la contribution du contre-terme de self-énergie n'est pas nulle, et est sensible à toutes les gammes d'impulsion pour le quark, il convient

de conserver la masse thermique  $m_F$  pour le quark.<sup>8</sup> On peut vérifier que seul le mode (+) du quark effectif contribue au logarithme, et que le propagateur effectif du quark devient dans l'approximation où la masse thermique est constante

$$S^{R,A}(P) = \frac{i\bar{P}}{\bar{P}^2 \pm ip_o\varepsilon} , \quad (8.21)$$

où je note  $\bar{P} \equiv (p_o, \hat{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}} \equiv \hat{\mathbf{p}}\sqrt{p^2 + m_F^2})$ . Si on utilise ce propagateur pour le quark, la contribution du contre-terme de self-énergie s'écrit

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^{RA}{}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) &= -\frac{e^2 g^2 N C_F}{2} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \\ &\times 2\pi\epsilon(l_o)\delta(L^2)2\pi\epsilon(\mathbf{r}_o + l_o)\delta(\mathbf{R}^2 + 2\mathbf{R} \cdot L + L^2)2\pi\epsilon(p_o)\delta(\bar{P}^2) \\ &\times [n_F(p_o) - n_F(r_o)][n_B(l_o) + n_F(\mathbf{r}_o + l_o)]\frac{i}{\bar{R}}\frac{i}{\bar{R}^2} \\ &\times -g_{\rho\sigma}\text{Tr}[\bar{P}\gamma_{\mu}\bar{R}\gamma^{\rho}(\mathbf{R} + L)\gamma^{\sigma}\bar{R}\gamma^{\mu}] . \end{aligned} \quad (8.22)$$

Le calcul de la trace donne cette fois

$$16[\bar{R}^2(\bar{P} \cdot L) - 2(\bar{R} \cdot L)(\bar{R} \cdot \bar{P})] . \quad (8.23)$$

En tenant compte des fonctions  $\delta(\cdot)$ , on a

$$\bar{R} \cdot L = r_o l_o \left(1 - \frac{\omega_{\mathbf{r}}}{r}\right) , \quad (8.24)$$

ainsi que

$$\bar{P} \cdot L = -q_o l_o + r_o l_o \left(1 - \frac{\omega_{\mathbf{r}}}{r}\right) . \quad (8.25)$$

Par comptage de puissance, comme  $\omega_{\mathbf{r}} - r \approx m_F^2/2r$  pour  $r$  dur, il est suffisant de garder  $-16q_o l_o \bar{R}^2$  pour cette trace puisque notre but est seulement d'extraire le logarithme.

Si on note  $\theta'$  l'angle entre les vecteurs spatiaux  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{l}$ , on a

$$\delta(2\mathbf{R} \cdot L) = \frac{1}{2pl}\delta(\cos\theta' - \frac{r_o l_o}{pl}) . \quad (8.26)$$

Les autres fonctions  $\delta(\cdot)$  peuvent être écrites sous la forme

$$\delta(L^2) = \frac{1}{2l} \sum_{\eta=\pm} \delta(l_o - \eta l) \quad (8.27\text{-a})$$

$$\epsilon(p_o)\delta(\bar{P}^2) = \epsilon(p_o)\delta(P^2 - m_F^2) = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} \sum_{\epsilon=\pm} \epsilon\delta(p_o - \epsilon\omega_{\mathbf{p}}) . \quad (8.27\text{-b})$$

---

<sup>8</sup>Si on n'est intéressé que par le logarithme qui domine le résultat, on peut se contenter d'approximer la relation de dispersion des quarks massifs par celle de particules de masse  $m_F$  constante.

On doit en outre imposer  $-1 \leq \cos \theta' \leq 1$ , ce qui entraîne  $\epsilon = -1$  si  $q_o > 0$ . Cela implique également  $\omega_{\mathbf{p}} - p \leq q_o \leq \omega_{\mathbf{p}} + p$ . Cette double inégalité peut se transformer en

$$p^* \equiv \frac{|q_o^2 - m_F^2|}{2q_o} \leq p. \quad (8.28)$$

En d'autres termes, les contraintes cinématiques fournissent ici une borne inférieure pour l'intégration sur l'impulsion du quark.<sup>9</sup> Le dénominateur  $\overline{R}^2$  peut quant à lui s'écrire

$$\overline{R}^2 = R^2 - m_F^2 = q_o^2 - 2q_o\omega_{\mathbf{p}}. \quad (8.29)$$

Si  $q_o^2 > 4m_F^2$ , cette quantité peut s'annuler pour une valeur positive de  $p$ , mais il est immédiat de vérifier que ce zéro se trouve toujours en dehors du domaine d'intégration délimité par la relation 8.28. Le résultat sera donc fini (même si  $q_o = m_F$ ).

Finalement, si on approxime  $n_F(p_o) - n_F(r_o) \approx -q_o n'_F(p_o)$ , on obtient pour ce contre-terme

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^{\text{RA}}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{0}) &\approx -\frac{e^2 g^2 N C_F}{2\pi^3} \left[ \int_0^{+\infty} dl l (n_B(l) + n_F(l)) \right] \\ &\times \left[ q_o \int_{p^*}^{+\infty} \frac{p dp}{\omega_{\mathbf{p}}} n'_F(p) \frac{q_o}{q_o^2 - 2q_o\omega_{\mathbf{p}}} \right]. \end{aligned} \quad (8.30)$$

C'est la deuxième intégrale qui donne le logarithme qui nous intéresse. Il faut toutefois prendre soin de garder tous les détails du dénominateur car ils contribuent également à l'échelle molle dans le logarithme. On peut par contre approximer le poids statistique par  $n'_F(p) \approx -\theta(T-p)/4T$ . On peut tout d'abord transformer cette intégrale en

$$q_o \int_{p^*}^{+\infty} dp n'_F(p) \frac{q_o}{q_o^2 - 2q_o\omega_{\mathbf{p}}} \approx \frac{q_o}{8T} \ln \left( \frac{2q_o T}{m_F^2} \right). \quad (8.31)$$

A ce stade, il est commode de réécrire ce résultat sous la forme suivante afin d'appréhender simplement la limite  $m_F \rightarrow 0$

$$\frac{q_o}{8T} \ln \left( \frac{2q_o T}{\text{Max}(q_o^2, m_F^2)} \right) + \frac{q_o}{8T} \ln \left( \frac{\text{Max}(q_o^2, m_F^2)}{m_F^2} \right). \quad (8.32)$$

On voit donc qu'un petit problème subsiste lorsque  $m_F$  tend vers zéro. On a dit plus haut que le zéro du dénominateur  $q_o^2 - 2q_o\omega_{\mathbf{p}}$  se trouvait toujours exclu du domaine d'intégration par les contraintes cinématiques. Cependant, il est

---

<sup>9</sup>Cette borne inférieure s'annule pour  $q_o = m_F$ , et on peut vérifier que cette propriété ne change pas si on utilise la relation de dispersion exacte pour le quark effectif. Toutefois, cela ne sera pas un problème, car le dénominateur ne s'annule jamais dans le domaine d'intégration si  $m_F > 0$ .

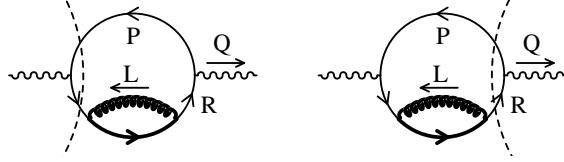


immédiat de vérifier que ce pôle migre vers le bord du domaine d'intégration si la masse  $m_F$  tend vers zéro. Cela doit se traduire sur les résultats par un logarithme divergent lorsque  $m_F \rightarrow 0$ , ce qui est manifestement le cas du deuxième terme de l'équation (8.32), qui devient lorsque  $m_F \ll q_o$

$$\frac{q_o}{8T} \ln \left( \frac{q_o^2}{m_F^2} \right). \quad (8.33)$$

L'étape suivante consiste à vérifier que cette divergence de masse est compensée par les corrections virtuelles apportées par d'autres coupures, représentées sur la figure 8.10. En effet, les coupures indiquées imposent au vecteur  $R$  d'être sur

FIG. 8.10 – Autres coupures à prendre en compte dans le calcul des contre-termes.



le cône de lumière lorsque la masse  $m_F$  tend vers zéro, ce qui rend la boucle dure insérée sur le propagateur du quark logarithmiquement singulière (voir la section 7.6.2).

Ces deux coupures donnent des contributions identiques, de sorte que je ne considérerai que la première d'entre elles et multiplierai sa contribution par deux à la fin :

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) &= -\frac{e^2 g^2 N C_F}{2} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \\ &\times 2\pi\epsilon(l_o)\delta(L^2)2\pi\epsilon(r_o)\delta(\bar{R}^2)2\pi\epsilon(p_o)\delta(\bar{P}^2) \\ &\times [n_F(r_o) - n_F(p_o)][n_B(l_o) + n_F(l_o)] \frac{i}{2R \cdot L} \frac{i\mathbb{P}}{\bar{R}^2} \\ &\times -g_{\rho\sigma} \text{Tr} [\bar{P}\gamma_\mu \bar{R}\gamma^\rho \not{L}\gamma^\sigma \bar{R}\gamma^\mu]. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Dans cette expression, l'approximation de boucle dure a déjà été faite pour les quantités qui dépendent de  $L$ . Le calcul de la trace donne

$$16[\bar{R}^2(\bar{R} \cdot L - q_o l_o) - 2(\bar{R} \cdot L)(\bar{R}^2 - r_o q_o)]. \quad (8.35)$$

La divergence attendue dans la limite  $m_F \rightarrow 0$  vient du dénominateur en  $R \cdot L$ . Comme les termes en  $\bar{R} \cdot L$  de la trace vont dans cette limite compenser la singularité du dénominateur, le seul terme à garder dans cette trace est  $-16q_o l_o \bar{R}^2$ . Les deux fonctions  $\delta(\cdot)$  associées aux quarks coupés<sup>10</sup> permettent de fixer la

<sup>10</sup>Ici, il faut prendre garde à ne pas écrire  $\bar{R}^2 \delta(\bar{R}^2)(\mathbb{P}/\bar{R}^2) = \delta(\bar{R}^2)$ . Le résultat correct est  $\delta(\bar{R}^2)/2$ . Ce petit paradoxe est dû à la non associativité du produit des distributions. Ici, il convient de calculer  $\bar{R}^2 [\delta(\bar{R}^2)(\mathbb{P}/\bar{R}^2)] = -\bar{R}^2 \delta'(\bar{R}^2)/2 = \delta(\bar{R}^2)/2$ . On pourra voir l'annexe A pour plus de détails sur cette question.

valeur de  $p_o = -q_o/2$ , ainsi que  $p = \sqrt{-m_F^2 + q_o^2/4}$ .<sup>11</sup> La divergence lorsque  $m_F \rightarrow 0$  apparaîtra dans l'intégrale sur l'angle  $\theta'$  entre  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{l}$ . Donnons directement le résultat final dans la limite  $m_F \ll q_o$  :

$$\text{Im } \Pi^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{0}) \approx \frac{e^2 g^2 N C_F}{128\pi} q_o T \ln \left( \frac{q_o^2}{m_F^2} \right). \quad (8.36)$$

Avec le facteur 2 destiné à prendre en compte l'autre coupure, ce terme compense précisément la divergence de masse exhibée par la coupure symétrique.<sup>12</sup> Par conséquent, le seul logarithme qui puisse apparaître dans la contribution de ce contre-terme est celui qui a été mis en évidence dans la formule (8.32).

Il faut encore multiplier ce terme par deux pour tenir compte du fait qu'il y a deux contre-terme de self-énergie, pour obtenir finalement :

$$\text{Im } \Pi^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{0}) \approx -\frac{e^2 g^2 N C_F}{32\pi} q_o T \ln \left( \frac{2q_o T}{\text{Max}(q_o^2, m_F^2)} \right). \quad (8.38)$$

Ceci est l'expression finale de la contribution des contre-terme.

On constate que cette contribution est identique à la partie logarithmique de la contribution “pôle-cut” à une boucle. Cette identité n'est pas fortuite. En effet, en utilisant le fait que le contre-terme de self-énergie n'est autre que la boucle dure de la self-énergie du quark, il est assez facile de prouver l'identité diagrammatique de la figure 8.11 (une version analytique de cette relation se trouve dans (7.21)). Cette relation permet d'identifier la partie “cut” de la discontinuité du propagateur effectif à la discontinuité du contre-terme insérée entre deux propagateurs effectifs.

### 8.3.3 Contributions à deux boucles

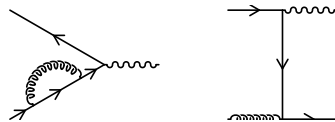
#### Logarithme venant du quark

Dans la section 8.2.2, on a vu que les termes logarithmiques impliquant un gluon de genre temps viennent du diagramme de self-énergie, et correspondent à seulement deux termes très simples de l'élément de matrice.

Le premier terme de (8.15), en  $-2R^2 g_{\rho\sigma}(Q \cdot L)$ , est sensible aux impulsions dures pour le gluon, et aux impulsions aussi bien dures que molles pour le quark,

<sup>11</sup>On retrouve ainsi le seuil habituel pour la réaction  $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ .

<sup>12</sup>Ce mécanisme de compensation met en jeu les diagrammes suivants



$$. \quad (8.37)$$

La compensation entre ces deux termes [115, 116, 117, 118, 119, 120], bien que différente des compensations de divergences infrarouges entre corrections virtuelles et réelles à température nulle, semble pouvoir s'interpréter dans le cadre du résultat de LEE et NAUENBERG [84]. En effet, lorsque la seule particule observée est le photon produit, ces deux processus de production peuvent encore être considérés comme dégénérés, même si le gluon est dur. Il ne semble donc pas trop surprenant d'avoir des compensations entre deux tels termes.

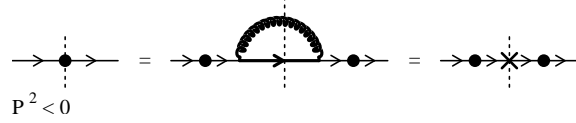


FIG. 8.11 – Relation entre le contre-terme de self-énergie et la contribution pôle-cut du diagramme à une boucle. La boucle en gras doit être évaluée avec l'approximation de boucle dure.

ce qui engendre un logarithme. Si on revient sur le calcul de la contribution des contre-terme, on peut voir après (8.25) que l'élément de matrice qui la donne est également proportionnel à  $Q \cdot L = q_o l_o$ . Par conséquent, cela signifie que ce terme est précisément celui qui doit être associé à la contribution des contre-terme. En fait, la seule différence entre cette contribution à deux boucles et celle issue des contre-terme réside dans les approximations utilisées pour calculer la correction de self-énergie sur le propagateur du quark. Dans le calcul du contre-terme, on a du par définition faire l'approximation de boucle dure dans cette boucle, ce qui a simplifié certaines étapes du calcul, et notamment la cinématique. Dans le calcul de la contribution à deux boucles, on ne doit pas faire une telle approximation. Cela signifie qu'au lieu de l'expression (8.22) qui donne la contribution du contre-terme, la contribution à deux boucles est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \text{Im } \Pi^{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) &= -\frac{e^2 g^2 N C_F}{2} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \\
 &\times \rho_T(l_o, l) 2\pi\epsilon(r_o + l_o) \delta(\overline{R} + \overline{L}^2) 2\pi\epsilon(p_o) \delta(\overline{P}^2) \\
 &\times [n_F(p_o) - n_F(r_o)] [n_B(l_o) + n_F(r_o + l_o)] \frac{i}{R^2} \frac{i}{\overline{R}^2} \\
 &\times P_{\rho\sigma}^T(L) [-2g^{\rho\sigma} \overline{R}^2 q_o l_o] , \tag{8.39}
 \end{aligned}$$

où  $\rho_T(l_o, l) \equiv {}^*\Delta_T^R(L) - {}^*\Delta_T^A(L)$  est la discontinuité de la composante transverse du propagateur du gluon effectif. La question qui se pose maintenant est de savoir si on a ici des termes qui ne sont pas compensés par le contre-terme déjà calculé. Il semble a priori que l'on va avoir de tels termes puisque le contre-terme est évalué avec l'approximation de boucle dure, qui n'est correcte que lorsque l'impulsion externe (ici  $R$ ) est molle, alors qu'on est sensible à des valeurs de  $R$  aussi bien dures que molles. Toutefois, on peut se convaincre facilement du fait que la différence entre l'équation précédente et la contribution du contre-terme ne donne pas de logarithme. Autrement dit, pour évaluer correctement un logarithme, il est suffisant de supposer au départ que l'impulsion responsable de ce logarithme (ici  $R$ ) est molle et de continuer à utiliser les approximations ainsi obtenues jusqu'à des valeurs dures. Les termes de (8.39) qui ne sont pas compensés par les contre-terme contribuent uniquement au terme d'ordre 1 qui

accompagne le logarithme d'ordre  $\ln(1/g)$ .

Par conséquent, il est inutile d'extraire le logarithme contenu dans l'expression (8.39), puisqu'un tel calcul ne serait qu'une redite du calcul déjà effectué pour les contre-termes. De même, la limite de masse nulle de ce résultat n'est correctement évaluée que si on fait appel aux deux autres façons de couper le diagramme de self-énergie. On observe les mêmes compensations que dans le cas des contre-termes.

Pour résumer ce paragraphe, on peut dire que les logarithmes qui viennent du propagateur du quark apparaissent déjà tous à une boucle dans le calcul de BRAATEN, PISARSKI et YUAN (voir la formule (8.2)). A deux boucles, les logarithmes de ce type qui pourraient survenir sont tous compensés par les contre-termes.

### Logarithme venant du gluon

L'autre terme susceptible de donner un logarithme a également été exhibé dans la section 8.2.2. Il s'agit du terme en  $-g_{\rho\sigma}R^2R^2$  dans (8.15). Comme sa structure est très différente de celle de la contribution des contre-termes, il est vraisemblable que ce terme à deux boucles va engendrer un logarithme qui n'est pas compensé par les contre-termes. Dans la région  $L^2 > 0$ , on peut écrire pour la fonction spectrale du gluon :

$$\rho_T(l_o, l) = \frac{\pi Z_T}{\omega_T} \sum_{\eta=\pm} \eta \delta(l_o - \eta \omega_T) , \quad (8.40)$$

où  $\omega_T$  est la solution de l'équation de dispersion du gluon transverse et  $Z_T$  le résidu correspondant. Tant qu'on ne s'intéresse qu'à l'extraction de la partie logarithmique, il est suffisant d'approximer  $\omega_T \approx \sqrt{(l^2 + m_g^2)}$ . Pour la même raison, il est suffisant d'approcher le résidu  $Z_T$  par 1, qui est sa valeur dans la limite des petites valeurs de  $l$ . Pour ce qui est des quarks, on n'est pas obligé de tenir compte de la masse thermique, ce qui permet d'écrire simplement

$$2\pi\delta(P^2) = \frac{\pi}{p} \sum_{\epsilon=\pm} \delta(p_o - \epsilon p) . \quad (8.41)$$

La cinématique pour cette nouvelle contribution a été étudiée dans la section 8.2.3. La partie de l'espace des phases auquel on s'intéresse plus particulièrement ici est représentée en gris clair sur la figure 8.8. De façon plus précise, le support dans le plan  $(l_o, l)$  est réduit à la courbe de dispersion du gluon transverse.<sup>13</sup> On voit déjà sur cette figure que du côté des régions I et III, l'intégration sur  $l$  pourra s'étendre d'une valeur molle qui est une combinaison de  $q_o$  et de  $m_g$  jusqu'à des valeurs dures. Au contraire, du côté de la région II, la variable  $l$  ne peut pas prendre de valeurs molles. Par conséquent, le logarithme attendu ne peut venir que des régions I et III. Analytiquement, l'intersection entre la

<sup>13</sup>Du seul point de vue de la cinématique, la courbe de dispersion des gluons longitudinaux fait également partie de ce support. Toutefois, comme les gluons longitudinaux sont exponentiellement supprimés dans la région dure, ils ne peuvent pas donner un logarithme.

courbe de dispersion du gluon transverse et les frontières du domaine issu de la cinématique fournit une borne inférieure  $l^*$  pour l'intégration sur la variable  $l$ . On retrouve ainsi ce qui est déjà visible sur la figure 8.8 : lorsque  $\eta = +1$  (ce qui correspond à la région II où  $l_o > 0$ ),  $l^*$  est une borne inférieure dure ce qui empêche d'avoir un logarithme. Dans le cas où  $\eta = -1$  (région I si  $\epsilon = -1$  et région III si  $\epsilon = +1$ ), on trouve une borne inférieure  $l^*$  qui est égale à<sup>14</sup>

$$l^* = \frac{|q_o^2 - m_g^2|}{2q_o} . \quad (8.42)$$

Si on remet tout ensemble, en faisant les approximations usuelles pour les poids statistiques, on obtient pour cette contribution la forme approchée suivante

$$\text{Im } \Pi^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{0}) \approx \frac{e^2 g^2 N C_F}{4\pi^3} \left[ q_o \int_0^{+\infty} dp'_F(p) \right] \left[ T \int_{l^*}^T \frac{ldl}{\omega_T^2} \right] , \quad (8.43)$$

ce qui, en tenant compte du fait qu'il y a deux diagrammes avec une correction de self-énergie, permet d'obtenir le résultat final suivant pour cette contribution

$$\text{Im } \Pi^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{0}) \approx -\frac{e^2 g^2 N C_F}{4\pi^3} q_o T \ln \left( \frac{2Tq_o}{q_o^2 + m_g^2} \right) . \quad (8.44)$$

En résumé, la formule précédente donne la seule contribution logarithmique restante dans les diagrammes à deux boucles lorsqu'on soustrait correctement les contre-termes, pour la portion de l'espace des phases où le gluon est de genre temps.

### 8.3.4 Comparaison avec BPY

On voit donc que la contribution logarithmique que l'on vient d'obtenir à deux boucles est tout à fait comparable à la contribution (8.2) que l'on peut extraire du résultat de BRAATEN, PISARSKI et YUAN, tant du point de vue de l'ordre de grandeur que du point de vue de la dépendance vis à vis de l'énergie du photon produit. Toutefois, on peut noter une différence au niveau des logarithmes. En effet, dans la contribution issu du diagramme à une boucle, ce logarithme contient la masse thermique du quark, ce qui est dû au fait que ce logarithme est engendré par le propagateur d'un quark. Au contraire, dans le résultat (8.44), c'est la masse thermique du gluon qui intervient. On peut voir cette différence comme une justification a posteriori du fait que l'on a correctement tenu compte des contre-termes, et qu'il n'y a pas de double comptage au sein de ces deux contributions.

<sup>14</sup>Le fait que cette borne inférieure  $l^*$  s'annule lorsque  $q_o^2 = m_g^2$  est évident sur la figure 8.8. D'après cette figure, il est également évident que l'approximation  $\omega_T \approx \sqrt{l^2 + m_g^2}$  n'est pas la cause de cette propriété, puisque seule compte la valeur de  $\omega_T$  à  $l = 0$ , qui est inchangée si on utilise la relation de dispersion exacte.

### 8.3.5 Comparaison avec la théorie nue

Si on additionne les contributions (8.2) et (8.44), on peut ensuite envisager de faire tendre formellement toutes les masses thermiques vers zéro afin de procéder à une comparaison avec des calculs effectués par ALTHERR et AURENCHE dans [121], où ils utilisaient la théorie nue.

En effet, si on prend cette limite, la somme de ces contributions à une et deux boucles dans la théorie effective donne

$$\text{Im } \Pi_{\mu}^{\mu}(q_o, \mathbf{0}) \underset{m_g, m_F \rightarrow 0}{\approx} -\frac{e^2 g^2 N C_F}{32\pi} \left(1 + \frac{8}{\pi^2}\right) q_o T \ln\left(\frac{T}{q_o}\right). \quad (8.45)$$

On peut alors remarquer que cette limite reproduit le résultat obtenu dans [121] en utilisant la théorie nue. En fait, en prenant cette limite de masse thermique nulle dans le résultat à une boucle (8.2), on aurait constaté qu'il manquait des termes pour arriver à faire la connexion avec le calcul effectué dans la théorie nue. Cela aurait pu alors être vu comme une sérieuse indication du fait que des contributions du même type vont arriver à deux boucles.

## 8.4 Processus impliquant un gluon de genre espace

### 8.4.1 Processus

Cette deuxième catégorie de processus à deux boucles implique la partie de genre espace de la discontinuité du gluon effectif. Compte tenu de la discussion faite dans la section 7.7, on a là des processus qui n'ont pas d'analogue à une boucle. Il n'y a donc pas lieu de se préoccuper des contre-terms dans cette région. Les zones du plan  $(l_o, l)$  qui constituent le support de ces processus sont les trois régions représentées en blanc sur la figure 8.8. Je les appellerai I, II, et III afin de les distinguer simplement dans le texte.

Pour déterminer la nature des processus mis en jeu ici, il suffit d'utiliser d'une part les résultats de la section 7.7, et d'autre part de regarder les signes de  $p_o$  et  $r_o + l_o$ . Les différents types de processus que l'on trouve ainsi sont représentés sur la figure 8.12. La région I correspond à un processus de bremsstrahlung dans lequel un antiquark diffuse sur un parton du plasma par échange d'un gluon virtuel, et émet un photon. La région III correspond aussi à du bremsstrahlung, mais le photon est cette fois émis par un quark. La région II contient quant à elle un processus un peu différent : un quark et un antiquark s'annihilent pour donner un photon, mais l'un des deux fermions subit auparavant une diffusion sur un parton du plasma. On peut déjà remarquer que l'espace des phases accessible à ce processus est très restreint lorsque le photon émis est mou. En effet, il faut que la somme des énergies du quark, de l'antiquark et du gluon soit égale à celle du photon. Nous verrons dans la section 9.7 du chapitre suivant que ce processus deviendra important lorsque le photon émis est de très grande énergie.

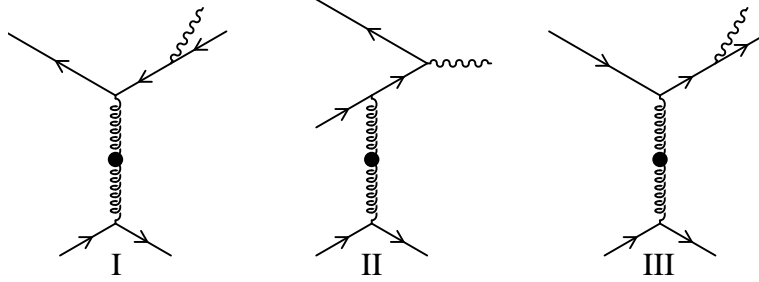


FIG. 8.12 – Processus d'émission de photons impliqués dans la région  $L^2 < 0$  de l'espace des phases. Région I :  $p_o < 0$ ,  $r_o + l_o < 0$ . Région II :  $p_o < 0$ ,  $r_o + l_o > 0$ . Région III :  $p_o > 0$ ,  $r_o + l_o > 0$ .

#### 8.4.2 Quelques remarques sur la taille de l'espace des phases

Je vais dans ce paragraphe donner quelques arguments basés sur l'espace des phases dans le but d'expliquer pourquoi certaines contributions comme le bremsstrahlung, qui n'apparaissent qu'à deux boucles, sont néanmoins du même ordre de grandeur que les processus qui apparaissent à une boucle.

Avec les mêmes approximations<sup>15</sup> que celles qui ont été mises en évidence dans la section 7.7, on peut vérifier que la contribution des régions I et III au taux de production de photons peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{dt d^3\mathbf{x}} \Big|_{\text{brems}} &\approx \frac{dq_o d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 K}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} \\
 &\times \left[ \begin{array}{c} \text{R+L} \rightarrow \text{P} \\ \text{K} \rightarrow \text{K} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{Q} \rightarrow \text{P} \\ \text{K} \rightarrow \text{K} \end{array} \right]^2 \\
 &\times 2\pi\delta(P^2) 2\pi\delta((R+L)^2) \\
 &\times 2\pi\delta(K^2) 2\pi\delta(K^2 + 2K \cdot L) \\
 &\times n_F(r_o + l_o) n_F(k_o) [1 - n_F(p_o)] [1 - n_F(k_o)] , \quad (8.46)
 \end{aligned}$$

où je note encore  $R \equiv P + Q$ . Même si elle ne rend pas les choses plus simples d'un point de vue purement technique, cette formule a l'avantage d'être plus aisée à interpréter. En particulier, elle isole clairement dans cette contribution au taux de production de photons un facteur qui n'est autre que le carré de l'amplitude du processus qui produit le photon. Tous les autres facteurs sont

<sup>15</sup>Rappelons que ces approximations sont correctes tant que l'impulsion  $L$  du gluon échangé lors de la diffusion reste molle.

des facteurs d'espace des phases. L'ordre de grandeur du résultat final résulte donc de la combinaison de ces facteurs d'espace des phases et de l'ordre de grandeur de l'amplitude elle même.

Avec ces contributions issues de diagrammes à deux boucles, on a a priori un handicap au niveau de l'amplitude qui est en  $e^2 g^4$ , à comparer à  $e^2$  pour l'amplitude au carré du processus  $q\bar{q} \rightarrow \gamma$  qui apparaît dans le diagramme à une boucle. Cependant, dans le cas de  $q\bar{q} \rightarrow \gamma$ , le quark et l'antiquark doivent être mous si le photon est mou. Au contraire, dans le cas du bremsstrahlung, le quark qui émet le photon mou peut être dur. Très grossièrement, on peut donc dire que le volume de l'espace des phases accessible au quark est  $(gT)^4$  dans le cas de l'annihilation  $q\bar{q} \rightarrow \gamma$  et  $T^4$  dans le cas du bremsstrahlung. En d'autres termes, la petitesse des amplitudes des processus qui apparaissent seulement à deux boucles peut parfois être compensée par un espace des phases plus avantageux.

Par le même genre de considérations, on peut également exhiber une différence entre la production de photons par un plasma et la production de photons à température nulle, dans une collision  $p\bar{p}$  par exemple. En effet, on peut écrire la contribution du bremsstrahlung au taux de production de photons dans une collision  $p\bar{p}$  d'une façon très similaire à la formule (8.46). Il suffit pour cela de voir les faisceaux de protons et d'antiprotons comme des "milieux denses" contenant une certaine densité de partons. La seule chose qui va changer dans la formule (8.46) se situe au niveau des poids statistiques. Les poids statistiques des quarks incidents sont remplacés par les fonctions de structure des protons et antiprotons multipliées par les flux dans les faisceaux incidents, et les poids statistiques des quarks sortants sont remplacés par 1 (si on n'observe que le photon et pas les jets qui se formeront à partir des quarks sortants). La seule différence entre  $T = 0$  et le cas d'un plasma vient donc des "fonctions de distribution" des quarks dans le "milieu dense" étudié, mais c'est une différence de taille. Dans le cas du plasma, ces fonctions de distribution sont isotropes, alors que dans le cas d'une collision  $p\bar{p}$  ces fonctions de distribution deviennent très piquées dans la direction du faisceau. Typiquement, une intégrale qui est  $\int f(p)p^2 dp$  dans le cas du plasma devient  $\int f(p)dp$  dans le cas  $T = 0$ . Par simple comptage de puissance, on voit qu'il est en général beaucoup plus facile à température finie d'avoir des intégrales dominées par la région dure de l'espace des phases.

### 8.4.3 Contribution du bremsstrahlung

Avant d'aller plus loin, il convient de rappeler que le processus de la région II est sous-dominant lorsque le photon produit est mou, du fait de la petitesse de son espace des phases. Dans la suite de ce chapitre, je ne m'intéresserai donc qu'au bremsstrahlung, venant des régions I et III. On peut à ce niveau remarquer que l'espace des phases, contraint par les distributions  $\delta(P^2)\delta((R+L)^2)$ , est invariant sous le changement de variable  $P \rightarrow -R-L, L \rightarrow L$  qui permute les régions I et III. On peut donc se limiter à une seule de ces deux régions (la région III par exemple), et multiplier le résultat final par un facteur 2.<sup>16</sup>

<sup>16</sup>Un autre facteur 2 est requis pour tenir compte du fait qu'il y a deux coupures possibles dans le diagramme qui correspond à une correction de vertex, ainsi que deux diagrammes qui



Ici aussi, il est analytiquement aisé d'extraire les termes qui donnent un grand logarithme dans la limite  $g \ll 1$ . Ces termes logarithmiques peuvent être identifiés par un simple comptage de puissances. En examinant les termes présents dans l'élément de matrice, il est facile de vérifier que le terme en

$$-8L^2(R_\rho R_\sigma + P_\rho P_\sigma) , \quad (8.47)$$

est le seul qui donne une contribution qui soit à la fois dominante et qui donne un grand logarithme. On peut d'emblée écrire la structure du résultat que va donner ce terme

$$\text{Im } \Pi^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{0}) \approx -C e^2 g^2 \frac{m_g^2 T}{q_o} \ln \left( \frac{T^2}{f(m_g^2, q_o^2)} \right) , \quad (8.48)$$

où  $C$  est un préfacteur purement numérique, et  $f(\cdot)$  une fonction de  $m_g^2$  et de  $q_o^2$ . En effet, lorsque  $q_o$  et  $m_g$  sont du même ordre de grandeur, ils sont en compétition comme régulateur infrarouge si l'impulsion du gluon devient molle.<sup>17</sup> On peut être un peu plus précis analytiquement. En effet, on a pour ce terme

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{0}) &\approx \frac{4N C_F e^2 g^2 T}{(2\pi)^4 q_o} \int_0^{+\infty} dp n'_F(p) \\ &\times \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} (1-x^2)^2 \int_{q_o/(1-x)}^{2p/(1-x)} dl l^3 (\rho_T(lx, l) - \rho_L(lx, l)) , \end{aligned} \quad (8.49)$$

où  $x$  désigne la quantité  $l_o/l$ .

Dans la région  $L^2 < 0$ , les fonctions spectrales  $\rho_{T,L}$  du gluon sont données par la relation

$$\rho_{T,L}(lx, l) \equiv \frac{-2\text{Im } \Pi_{T,L}^{HTL}}{(l^2(x^2 - 1) - \text{Re } \Pi_{T,L}^{HTL})^2 + (\text{Im } \Pi_{T,L}^{HTL})^2} . \quad (8.50)$$

Si on suppose qu'on s'intéresse à des photons extrêmement mous vérifiant en outre  $q_o \ll m_g$ , l'argument du logarithme va se simplifier car  $m_g$  restera le seul régulateur infrarouge pertinent. Techniquement, cela revient à remplacer par 0 la borne inférieure de l'intégrale sur la variable  $l$  dans l'équation (8.49). Il est maintenant assez aisé de faire l'intégration sur  $l$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{0}) &\approx -\frac{N C_F e^2 g^2 T}{(2\pi)^4 q_o} \int_0^{+\infty} dp n'_F(p) \\ &\times \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} (\text{Im } \Pi_L^{HTL} - \text{Im } \Pi_T^{HTL}) \ln \left( \frac{p^4}{m_g^4} \right) , \end{aligned} \quad (8.51)$$

correspondent à une correction de self-énergie sur les quarks.

<sup>17</sup>  $q_o$  agit en tant que régulateur infrarouge de façon cinématique, en excluant la singularité de la région autorisée de l'espace des phases.  $m_g$  agit comme régulateur infrarouge en empêchant le propagateur du gluon de devenir infini.

où j'ai ignoré tout ce qui pouvait contribuer à la constante additive qui va accompagner le logarithme (en particulier, les facteurs dépendant de  $x$  dans le logarithme). Dans le même ordre d'idées, on peut remplacer  $p^4$  par  $T^4$  dans le logarithme car la différence entre les deux ne contribue qu'à cette constante d'ordre 1 qu'on a systématiquement négligée jusque là. Cela donne finalement la contribution dominante du bremsstrahlung dans la gamme d'énergies  $q_o \ll m_g \ll T$  :

$$\text{Im } \Pi^{RA}_{\mu}(q_o, \mathbf{0}) \approx -\frac{3e^2 g^2 N C_F}{8\pi^3} \frac{m_g^2 T}{q_o} \ln\left(\frac{T^2}{m_g^2}\right). \quad (8.52)$$

À partir de là, on peut utiliser la formule (6.11) pour donner le taux de production de di-leptons

$$\left. \frac{dN}{dt d^3 \mathbf{x}} \right|_{\text{brems}} \Big|_{q_o \ll m_g} \approx \frac{dq_o d^3 \mathbf{q}}{8\pi^6} N C_F \alpha^2 \left( \sum_f e_f^2 \right) \left( \frac{m}{q_o} \right)^2 \left( \frac{gT}{q_o} \right)^2 \ln\left(\frac{T^2}{m_g^2}\right), \quad (8.53)$$

où la somme  $\sum_f$  parcourt toutes les saveurs incluses dans la boucle de quarks, et où  $e_f$  désigne la charge électrique du quark de saveur  $f$ , exprimée en unités de  $e$ .

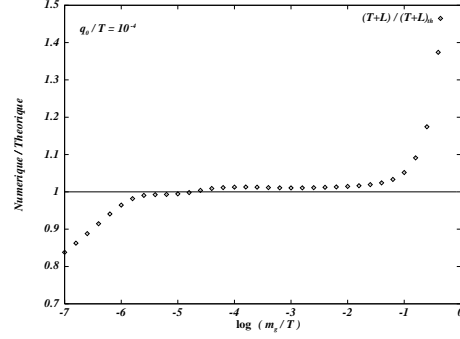
Après autant d'approximations, dont certaines peuvent sembler assez drastiques, on peut comparer le résultat donné par la formule (8.52) avec une estimation numérique de la contribution complète du bremsstrahlung à ce tenseur de polarisation. Si on fait le rapport de cette évaluation numérique avec l'estimation théorique donnée par (8.52), on trouve les résultats reproduits sur la figure 8.13. On constate que les approximations faites pour obtenir (8.52) donnent un résultat qui ne diffère du résultat complet qu'au plus de 5% lorsque  $m_g/T$  est inférieur à  $10^{-1}$ . Si  $m_g/T$  n'est pas assez petit, alors le logarithme ne peut plus être considéré comme grand, et toutes les constantes d'ordre 1 que nous avons négligées sont également importantes. Le second graphe permet de tester les approximations faites pour simplifier l'argument du logarithme. On y voit que l'hypothèse concernant la petitesse de  $q_o/m_g$  n'a pas besoin d'être strictement vérifiée pour le résultat soit correct. En fait, on voit qu'on a encore une précision raisonnable avec  $q_o/m_g \sim 10$ .

On peut également comparer la contribution du bremsstrahlung avec les contributions obtenues par BRAATEN, PISARSKI et YUAN, dans la même région du spectre. Si on se limite à la partie de leur résultat qui exhibe un logarithme, il est très facile également d'en donner une estimation analytique (équivalente à la formule (8.1)) :

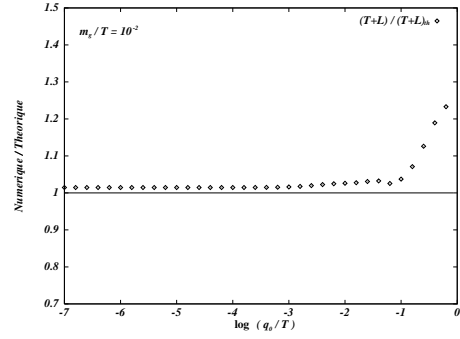
$$\left. \frac{dN}{dt d^3 \mathbf{x}} \right|_{\text{boucle}} \Big|_{q_o \ll m_F} \approx \frac{dq_o d^3 \mathbf{q}}{12\pi^4} N \alpha^2 \left( \sum_f e_f^2 \right) \left( \frac{m_F}{q_o} \right)^4 \ln\left(\frac{T^2}{m_F^2}\right), \quad (8.54)$$

où  $m_F^2 = g^2 C_F T^2/8$  est la masse thermique des quarks. On peut alors faire le rapport entre le bremsstrahlung donné par (8.53) et la contribution issue du

FIG. 8.13 – Comparaison entre l'évaluation numérique de la contribution complète du bremsstrahlung et le résultat donné par (8.52). Sur la première courbe,  $q_0/T$  est fixé à  $10^{-4}$ , et on regarde les variations avec  $m_g/T$  (*i.e.* avec  $g$ ).



Même quantité avec  $m_g/T$  fixé à  $10^{-2}$ , et où on fait varier l'énergie des photons produits.



calcul à une boucle, ce qui donne

$$\frac{dN|_{\text{bremss}}}{dN|_{\text{1boucle}}} \approx \frac{32}{3\pi^2} \frac{N + N_F/2}{C_F}, \quad (8.55)$$

ce qui donne pour 3 couleurs et 2 saveurs

$$\frac{dN|_{\text{bremss}}}{dN|_{\text{1boucle}}} \approx \frac{32}{\pi^2} \sim 3.2. \quad (8.56)$$

On voit donc quantitativement que le bremsstrahlung est une contribution qui ne peut absolument pas être négligée pour le taux de production de di-leptons mous par un plasma.

## 8.5 Conclusions et extensions

Dans ce chapitre, on a tout d'abord complété le calcul des processus qui apparaissent à une boucle, puisque ces processus reçoivent des corrections essentielles à deux boucles. Le résultat total pour ces processus (uniquement la

partie logarithmique) est

$$\text{Im } \Pi^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{0}) \approx -\frac{e^2 g^2 N C_F}{32\pi} q_o T \left[ \ln \left( \frac{2q_o T}{\text{Max}(q_o^2, m_F^2)} \right) + \frac{8}{\pi^2} \ln \left( \frac{2q_o T}{q_o^2 + m_g^2} \right) \right]. \quad (8.57)$$

Ce résultat permet de réconcilier le calcul effectué dans la théorie effective avec celui effectué dans la théorie nue, dans la limite où les masses thermiques  $m_g, m_F$  tendent vers zéro.

Par ailleurs, le bremsstrahlung apparaît dans les diagrammes à deux boucles et donne également une contribution dominante dans la région des photons très mous :

$$\text{Im } \Pi^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{0}) \approx -\frac{3e^2 g^2 N C_F}{8\pi^3} \frac{m_g^2 T}{q_o} \ln \left( \frac{T^2}{m_g^2} \right), \quad (8.58)$$

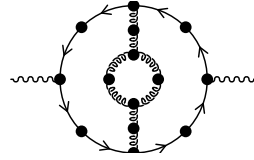
qui complète la contribution trouvée à une boucle dans cette région du spectre :

$$\text{Im } \Pi^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) \approx -\frac{e^2 g^2 N C_F}{32\pi} \frac{m_F^2 T}{q_o} \ln \left( \frac{T^2}{m_F^2} \right). \quad (8.59)$$

D'un point de vue phénoménologique, qu'elles soient dues à des corrections à des processus déjà considérés à une boucle ou à des processus nouveaux, les nouvelles contributions obtenues à deux boucles vont accroître assez fortement le taux de production de photons statiques prédit à une boucle.

Par ailleurs, nous venons juste de voir que la contribution du bremsstrahlung à ce taux de production de di-leptons exhibe un logarithme qui vient du propagateur du gluon. Or, il s'agit plus spécifiquement de la discontinuité de ce propagateur, dans la région de genre espace. En vertu des arguments généraux donnés dans la section 7.7, on doit s'attendre à avoir une contribution importante dans les diagrammes à trois boucles qui corrigent le propagateur du gluon, du type de celui qui est représenté sur la figure 8.14. La situation n'est cepen-

FIG. 8.14 – Exemple de topologie à 3 boucles apportant une correction au propagateur du gluon dans la région dure.

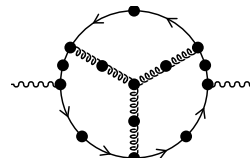


pas aussi simple que cela. En effet, pour maintenir l'invariance du résultat vis à vis de la jauge dans laquelle le propagateur du gluon est exprimé, il faudra des topologies plus complexes comme celle de la figure 8.15.

---

FIG. 8.15 – Exemple de topologie  
nécessaire à 3 boucles pour rendre le  
résultat invariant de jauge.

---



## Chapitre 9

# Production de photons quasi-réels

L'Académie des sciences de Bordeaux [...] proposa pour le sujet du prix de cette année de trouver pourquoi la laine de ce mouton était rouge; et le prix fut adjugé à un savant du Nord, qui démontra par  $A$  plus  $B$ , moins  $C$ , divisé par  $Z$ , que le mouton devait être rouge, et mourir de la clavelée.

VOLTAIRE  
*Candide ou l'optimisme*

**L**e chapitre précédent a montré quelques uns des problèmes que l'on rencontre lorsqu'on fait des calculs avec la théorie effective basée sur les boucles dures. En particulier, il est apparu que le calcul à une boucle n'est pas suffisant pour donner tous les termes dominants dans le taux de production de photons statiques. Des contributions à deux boucles ont été mises en évidence, et il semble vraisemblable que certains diagrammes d'ordre supérieur à deux boucles vont y contribuer.

Je vais dans ce chapitre présenter un autre type de problèmes que l'on rencontre dans certaines situations. Il s'agit plus précisément des divergences collinaires que l'on rencontre dans le calcul du taux de production de photons réels. Ces divergences ont déjà été rencontrées à une boucle, auquel cas elles étaient logarithmiques [122, 123]. Dans ce cas, elles sont étroitement reliées au fait que les boucles dures elles mêmes exhibent ce type de divergence lorsque leurs lignes externes sont sur le cône de lumière. Elles peuvent donc être régularisées par la procédure proposée par FLECHSIG et REBHAN [111].

Je m'intéresserai ici au calcul à deux boucles du taux de production de photons réels (mous et durs) par un plasma de quarks et de gluons. On y rencontrera également des divergences colinéaires, mais qui sont cette fois beaucoup plus fortes que logarithmiques. Ici encore, ces divergences peuvent être régularisées par une masse d'origine thermique. Toutefois, au lieu de donner un facteur  $\ln(1/g)$  comme c'était le cas à une boucle, on obtient ici des puissances de  $1/g$ , ce qui rend les contributions contenant ces divergences dominantes, y compris devant le résultat issu du calcul à une boucle. Il s'agit d'un travail publié dans les articles [124, 125, 113].

Je commence ce chapitre par un bref rappel des résultats du calcul à une boucle, et enchaîne par des généralités sur les diagrammes à deux boucles dans la section suivante. Je montrerai ensuite de façon qualitative, puis plus quantitative, pourquoi on peut avoir des divergences colinéaires aussi fortes dans certains diagrammes à deux boucles.

Les trois sections suivantes seront dédiées à une discussion plus spécifique de la production de photons mous d'abord réels, légèrement virtuels ensuite, et enfin de photons réels durs. En particulier, je discuterai de façon assez détaillée les aspects infrarouges de ce calcul, ainsi que l'effet d'une éventuelle masse magnétique.

Enfin, dans la dernière section, je tenterai de resituer cette discussion dans un contexte plus général. J'y montrerai que les divergences colinéaires rencontrées dans ce calcul à deux boucles sont formellement analogues aux divergences que l'on peut rencontrer dans les boucles dures. Une fois encore, il apparaîtra que l'approximation de boucle dure ne permet pas d'appréhender à une boucle des termes dominants qu'il faut ensuite aller chercher dans les diagrammes à deux boucles.

## 9.1 Photons mous réels à une boucle

La contribution à une boucle au taux de production de photons réels mous à été considérée par plusieurs groupes [122, 123] qui ont tous abouti à la conclusion que ce taux de production était affecté par une divergence colinéaire logarithmique. Le diagramme à une boucle considéré ici est le même que celui qui a été considéré par BRAATEN, PISARSKI et YUAN pour la production de photons statiques (voir la figure 8.1). Le résultat obtenu dans le formalisme retardé-avancé par [123] peut se mettre en  $D$  dimensions sous la forme

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^{\mu A}_{\mu}(q_o, \mathbf{q}) &= -2Ne^2 m_F^2 \int \frac{d\Omega_l}{(2\pi)^{1-2\epsilon}} \frac{1}{Q \cdot \hat{L} + i\varepsilon} \\ &\times \int \frac{d^D P}{(2\pi)^{D-1}} 2\pi \delta(P \cdot Q) [1 - 2n_F(p_o)] \\ &\times \sum_{s=\pm} \left[ \left(1 - \frac{sp_o}{p}\right) \text{Disc}^* \Delta_s^R(P) + \left(1 - \frac{sr_o}{r}\right) \text{Disc}^* \Delta_s^R(R) \right], \quad (9.1) \end{aligned}$$

où l'on note  $R \equiv P + Q$ ,  $\hat{L} \equiv (1, \hat{l})$ , et  $D = 4 + 2\epsilon$ , ainsi que

$$*S^R(P) \equiv i \sum_{s=\pm} \hat{P}_s * \Delta_s^R(P) , \quad (9.2)$$

avec  $\hat{P}_s \equiv (1, s\hat{p})$ . L'intégrale angulaire qui apparaît sur la première ligne vient des vertex effectifs contenus dans ce diagramme. Cette intégrale est régulière si  $\epsilon > 0$ , mais diverge comme  $\epsilon^{-1}$  lorsque la dimension  $D$  tend vers 4 :

$$\text{Im } \Pi^{RA}{}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) \underset{D \rightarrow 4}{\sim} e^2 g^4 \frac{T^3}{q_o} \frac{1}{\epsilon} . \quad (9.3)$$

Il s'agit en fait d'un cas particulier des divergences colinéaires qui surgissent dans les boucles dures (ici le vertex effectif  $q\bar{q}\gamma$ ) lorsque l'une des impulsions externes est sur le cône de lumière. Ce calcul fournit donc un exemple d'observable dans lequel de telles divergences colinéaires ne se compensent pas.

Dans ce cas précis, la version améliorée des boucles dures proposée par FLECHSIG et REBHAN [111] suffit à écranter ces divergences, ce qui remplace le facteur  $1/\epsilon$ , par un logarithme, pour donner

$$\text{Im } \Pi^{RA}{}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) \sim e^2 g^4 \frac{T^3}{q_o} \ln \left( \frac{T^2}{M_{\infty}^2} \right) , \quad (9.4)$$

où  $M_{\infty}^2 \equiv 2m_F^2$  est la masse thermique asymptotique qui est incorporée dans le calcul des boucles dures améliorées.

Du point de vue des processus physiques impliqués dans ce calcul, on trouve que cette divergence colinéaire vient des processus de la figure 8.4. Pourtant, les approches semi-classiques considèrent a priori le bremsstrahlung, qui n'apparaîtra qu'à deux boucles, comme une contribution essentielle. Par ailleurs, les résultats du chapitre précédent indiquent que certains diagrammes à deux boucles, incluant le bremsstrahlung, peuvent se maintenir au même niveau que les contributions issues du diagramme à une boucle, parce que la taille de l'espace des phases accessible suffit à compenser un plus grand nombre de constantes de couplage. Il n'y a a priori aucune raison pour que cet argument change lorsqu'on s'intéresse aux photons réels. La combinaison de ces deux remarques nous amène donc à étudier les contributions à deux boucles au taux de production de photons réels.

## 9.2 Diagrammes à deux boucles

### 9.2.1 Diagrammes

Les diagrammes à deux boucles à considérer ici sont les mêmes que ceux qui ont été présentés dans la section 8.2. Les arguments basés sur les identités de WARD qui ont été exposés dans cette section restent bien sûr valides ici, et ne seront par conséquent pas reproduits. Anticipant à nouveau le fait que ces



contributions seront dominées par un quark dur circulant dans la boucle,<sup>1</sup> on peut simplifier les diagrammes représentés sur la figure 8.5 pour ne conserver que les diagrammes plus simples de la figure 8.7.

### 9.2.2 Eléments de matrice

Il est également inutile de calculer à nouveau les éléments de matrice donnés par les formules (8.8) et (8.11), puisque leur justification ne s'est nullement appuyée sur le fait que le photon produit était statique dans le chapitre précédent. Par contre, il est cette fois impératif de conserver la masse thermique asymptotique des quarks effectifs dans la limite dure de leur propagateur. Cela signifie que dans les formules (8.8) et (8.11), il faut utiliser le propagateur suivant pour les quarks

$$S^{R,A}(P) \equiv \bar{P} \Delta^{R,A}(P) \quad (9.5-a)$$

$$\Delta^{R,A}(P) \equiv \frac{i}{\bar{P}^2 \pm ip_o \varepsilon}, \quad (9.5-b)$$

où je note  $\bar{P} \equiv (p_o, \hat{\mathbf{p}} \sqrt{M_\infty^2 + \mathbf{p}^2})$ .

La masse  $M_\infty$  s'avèrera essentielle afin de régulariser des divergences colinéaires que nous rencontrerons plus loin dans le calcul. En principe, la masse  $M_\infty$  change aussi les deux traces de DIRAC qui apparaissent dans les formules (8.8) et (8.11), en remplaçant toutes les impulsions des quarks par la même impulsions surmontée d'un trait. Toutefois, lorsque  $P$  est dur, on peut utiliser les relations suivantes

$$\overline{P+L} = \bar{P} + L + \mathcal{O}\left(\frac{LM_\infty^2}{P^2}\right) \quad (9.6-a)$$

$$\overline{P+Q} = \bar{P} + Q + \mathcal{O}\left(\frac{QM_\infty^2}{P^2}\right). \quad (9.6-b)$$

En d'autres termes, l'approximation qui consiste à remplacer  $\overline{P+L}$  par  $\bar{P} + L$  ne néglige que des termes qui sont supprimés par un facteur  $g^2$  par rapport à  $L$ . Ces approximations, associées au fait que les diagrammes considérés sont dominés par de très fortes divergences colinéaires, permettront un peu plus tard de donner quelques résultats simples mais néanmoins assez généraux concernant ces traces.

### 9.2.3 Espace des phases

Ici aussi, on a deux fonctions  $\delta(\cdot)$  associées aux propagateurs coupés de quarks. On peut les utiliser de la même façon que dans le chapitre précédent. Simplement, comme  $\mathbf{q}$  n'est plus nul, quelques détails techniques vont changer.

---

<sup>1</sup>Ce résultat devient maintenant prévisible à la lumière des arguments donnés dans la section 8.4.2.

La première distribution  $\delta(P^2 - M_\infty^2)$  est utilisée pour obtenir la valeur de  $p_o = \pm \omega_{\mathbf{p}}$  avec  $\omega_{\mathbf{p}} \equiv \sqrt{M_\infty^2 + \mathbf{p}^2}$ , ainsi que  $r_o = q_o \pm \omega_{\mathbf{p}}$ .

La deuxième distribution  $\delta((R+L)^2 - M_\infty^2)$  permet d'extraire le cosinus de l'angle  $\theta'$  entre les vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{l}$  :<sup>2</sup>

$$\cos \theta' = \frac{R^2 - M_\infty^2 + 2r_o l_o + L^2}{2rl} . \quad (9.7)$$

Si on impose à cette quantité de se trouver comprise entre  $-1$  et  $1$ , on obtient les deux inégalités suivantes

$$(r_o - r + l_o + l)(r_o + r + l_o - l) \geq M_\infty^2 \quad (9.8\text{-a})$$

$$(r_o - r + l_o - l)(r_o + r + l_o + l) \leq M_\infty^2 , \quad (9.8\text{-b})$$

ce qui va encore conduire à des restrictions dans le plan  $(l_o, l)$ . Plus précisément, les deux inégalités précédentes ont pour solution

$$\begin{aligned} \sqrt{(r-l)^2 + M_\infty^2} \leq l_o + r_o \quad \text{ou} \quad l_o + r_o \leq -\sqrt{(r-l)^2 + M_\infty^2} \\ -\sqrt{(r+l)^2 + M_\infty^2} \leq l_o + r_o \leq \sqrt{(r+l)^2 + M_\infty^2} . \end{aligned} \quad (9.9)$$

La conséquence de ces inégalités sur le domaine autorisé dans le plan  $(l_o, l)$  est représentée sur la figure 9.1.

Comme la fonction  $\delta(P^2 - M_\infty^2)$  rend plus commode l'usage de  $p$  comme variable indépendante (au lieu de  $r$ ), les quantités  $-r_o \pm \omega_r$  qui apparaissent sur la figure 9.1 sont implicitement des fonctions de  $p$  et de l'angle  $\theta$  entre  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$ . Par conséquent, les contraintes précédentes doivent être vues comme des limitations sur les valeurs que peuvent prendre les variables indépendantes  $p$ ,  $\theta$ ,  $l$  et  $l_o$ . A ces variables, il faut en ajouter une cinquième qui n'est pas contrainte par les relations précédentes, et qui peut être l'angle azimutal  $\phi$  entre les projections de  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{l}$  sur un plan orthogonal à  $\mathbf{r}$ .

Toutes les autres quantités peuvent s'exprimer au moyen de ces cinq variables. Ainsi, on aura besoin de l'angle  $\theta''$  entre les vecteurs  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{l}$ , dont le cosinus est donné par la relation

$$\cos \theta'' = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \phi . \quad (9.10)$$

## 9.3 Généralités sur l'apparition de divergences colinéaires

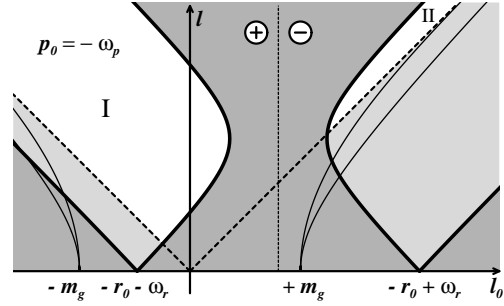
### 9.3.1 Position des pôles

Le fait de considérer des photons réels ( $Q^2 = 0$ ) est susceptible d'occasionner des divergences colinéaires dans le calcul du taux de production de photons. Il

---

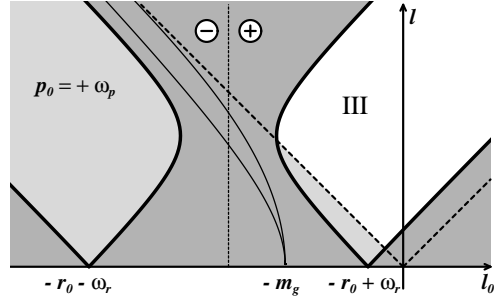
<sup>2</sup>Ici, il faut a priori distinguer clairement  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{r}$ , puisque  $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ . Toutefois, comme  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{r}$  sont durs alors qu'on s'intéresse à des photons mous, on peut en pratique identifier  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{r}$ .

FIG. 9.1 – Domaines autorisés dans le plan  $(l_o, l)$ , pour  $p_o = -\omega_p$ . La région en gris foncé est exclue par les contraintes imposées par les fonctions  $\delta(\cdot)$ . La région en gris clair est autorisée et se trouve dans la région de genre temps (les courbes sont les relations de dispersion du gluon effectif). La région en blanc est également autorisée et se trouve dans la partie de genre espace.



Domaines autorisés dans le plan  $(l_o, l)$  lorsque  $p_o = \omega_p$ .

Sur les deux figures, la ligne verticale en pointillés est la frontière entre  $\epsilon(p_o)\epsilon(r_o + l_o) = +1$  et  $\epsilon(p_o)\epsilon(r_o + l_o) = -1$ .



faut donc maintenant considérer de plus près les singularités potentielles contenues dans les diagrammes de la figure 8.7. A cet effet, dans le but de simplifier la discussion, il est possible de ne pas tenir compte pour l'instant de la masse  $M_\infty$ , qui sera réintroduite plus tard si elle s'avère indispensable pour régulariser d'éventuelles divergences.

Dans ces diagrammes, on a deux dénominateurs  $R^2$  et  $(P+L)^2$ , qui doivent être évalués en tenant compte des contraintes  $Q^2 = 0$ ,  $P^2 = 0$  et  $(R+L)^2 = 0$ . Commençons par  $R^2$ , que l'on peut réécrire de la manière suivante

$$\begin{aligned} R^2 &= (P+Q)^2 &= 2P \cdot Q \\ &= 2p_o q_o (1 \pm \cos \theta) . \end{aligned} \quad (9.11)$$

On voit donc que ce dénominateur va s'annuler lorsque le vecteur  $\mathbf{p}$  est parallèle à la direction d'émission du photon. On aura donc affaire à une divergence colinéaire associée à ce dénominateur. Par un raisonnement complètement symétrique, il est immédiat de vérifier que  $(P+L)^2$  s'annule lorsque  $\mathbf{r} + \mathbf{l}$  est parallèle à  $\mathbf{q}$ . Une deuxième divergence colinéaire est donc associée à ce dénominateur. Une précision s'impose ici : a priori, ces deux dénominateurs viennent avec une prescription de partie principale, de sorte que ces pôles pourraient ne pas être un problème. Toutefois, le fait qu'on ait des parties principales ne nous est d'aucune utilité ici car les pôles se trouvent à l'extrémité de l'intervalle d'intégration. Si on utilise en effet comme variable le cosinus de l'angle incriminé, on a une singularités à  $\cos \theta = \pm 1$ , alors que le domaine d'intégration pour cette variable est précisément  $[-1, 1]$ .

### 9.3.2 Proximité des pôles

Comme dans les éléments de matrice à calculer figure le produit de deux dénominateurs, il est maintenant légitime de se demander si on va avoir la somme de deux singularités logarithmiques, ou si au contraire les deux dénominateurs vont se combiner pour donner une divergence beaucoup plus forte. La réponse à cette question est évidente dans le cas de la topologie qui correspond à une correction de self-énergie. En effet, pour ce diagramme, on a deux fois le même dénominateur  $(R^2)^2$ . Ce diagramme contient donc un pôle double qui donne une singularité linéaire. Ainsi, lorsqu'on va réintroduire la masse  $M_\infty$  pour régulariser ces divergences, on aura des puissances de  $1/g$  au lieu du  $\ln(1/g)$  qu'on avait à une boucle.

Dans le cas du diagramme qui correspond à une correction au niveau du vertex  $q\bar{q}\gamma$ , on a deux dénominateurs  $R^2$  et  $(P+L)^2$  qui sont distincts. Si on regarde les conditions d'annulation établies deux paragraphes plus haut, on voit qu'ils ont également des pôles distincts. Cependant, lorsqu'on a le produit de deux dénominateurs pouvant s'annuler, un paramètre important est la distance qui sépare les deux pôles. En effet, on peut se faire une idée de la situation en

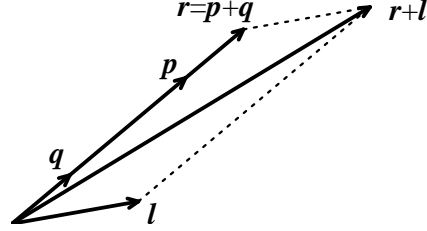
considérant l'intégrale suivante<sup>3</sup>

$$\int_0^2 du \frac{1}{u+\epsilon} \frac{1}{u+\eta} = \frac{1}{\epsilon-\eta} \int_0^2 du \left[ \frac{1}{u+\eta} - \frac{1}{u+\epsilon} \right] = \frac{1}{\epsilon-\eta} \ln \left[ \frac{2+\eta\epsilon}{2+\epsilon\eta} \right]. \quad (9.12)$$

Si les deux pôles sont éloignés l'un de l'autre, les deux régulateurs  $\epsilon$  et  $\eta$  ne peuvent pas être infinitésimaux simultanément, et l'un d'eux ( $\eta$  par exemple) est d'ordre 1. Cela signifie que le résultat de l'intégrale sera d'ordre  $\ln(1/\epsilon)$ . En d'autres termes, seul le logarithme subsiste, le préfacteur étant d'ordre unité. Par contre, si les deux pôles sont voisins, les paramètres  $\epsilon$  et  $\eta$  peuvent devenir petits simultanément, ce qui fait que l'intégrale est précédée d'un grand préfacteur  $1/(\epsilon-\eta)$ .<sup>4</sup>

Supposons donc maintenant que  $\mathbf{p}$  est parallèle à  $\mathbf{q}$ , de sorte que l'on se trouve sur le zéro du dénominateur  $R^2$ , et regardons si la condition d'annulation de  $(P+L)^2$  (à savoir  $\mathbf{r}+\mathbf{l}$  parallèle à  $\mathbf{q}$ ) est satisfaite ou pas. D'après le dessin de la figure 9.2, il est évident que cette deuxième condition sera presque satisfaite si  $l \ll r$ , c'est à dire si  $l$  est une impulsion molle. Dans les calculs, cela va se

FIG. 9.2 – Illustration des conditions de parallélisme donnant les singularités colinéaires.



traduire de la façon suivante : l'intégrale sur  $l$  va être dominée par les valeurs de  $l$  qui sont telles que l'on peut considérer que l'on a un double pôle. Plus précisément, nous verrons qu'elle est dominée par les valeurs de  $l$  qui n'exèdent pas la valeur du régulateur des divergences colinéaires, *i.e.* la masse  $M_\infty$ .

### 9.3.3 Condition sur $L^2$

Cependant, ces conclusions ont à chaque fois été obtenues en considérant l'un des dénominateurs et deux des contraintes parmi les trois disponibles (par exemple, pour le dénominateur  $(P+L)^2$ , j'ai utilisé seulement les contraintes  $Q^2 = 0$  et  $(R+L)^2 = 0$ , mais pas  $P^2 = 0$ ). Il convient donc maintenant de

<sup>3</sup>Pour faire la connexion avec le problème qui nous intéresse, on peut voir  $u$  comme la variable  $1 - \cos \theta$ , et les quantités positives  $\epsilon$  et  $\eta$  comme résultant de la masse  $M_\infty$  qui va régulariser les divergences colinéaires, *i.e.* déplacer légèrement les pôles pour qu'ils se trouvent hors du domaine d'intégration.

<sup>4</sup>Dans la limite  $\eta \rightarrow \epsilon$ , on obtient un résultat très proche de  $1/\epsilon$ , qui est très supérieur au résultat  $\ln(1/\epsilon)$  obtenu lorsque le deuxième pôle est très éloigné du premier.

vérifier que la troisième contrainte, non utilisée pour l'instant, n'empêche pas d'atteindre le point où se trouve la singularité. L'effet de la contrainte  $P^2 = 0$  sur l'annulation du dénominateur  $(P+L)^2$  est étudiée sur la figure 9.3.<sup>5</sup> On constate

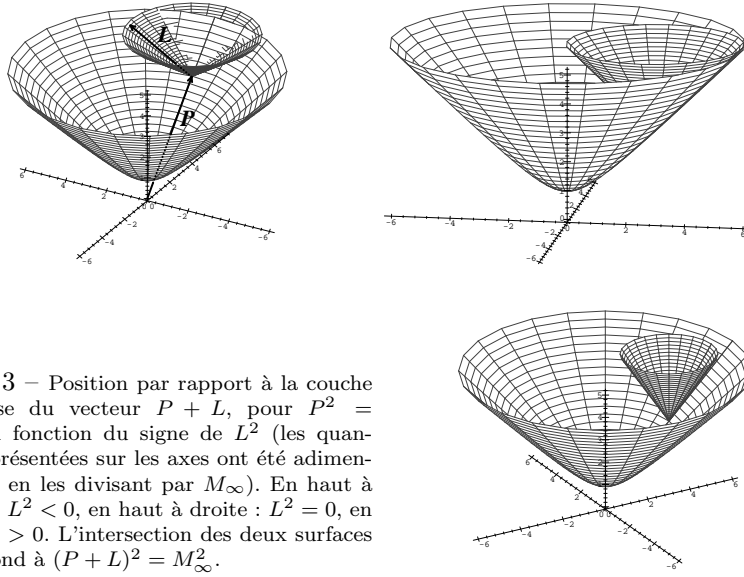


FIG. 9.3 – Position par rapport à la couche de masse du vecteur  $P + L$ , pour  $P^2 = M_\infty^2$ , en fonction du signe de  $L^2$  (les quantités représentées sur les axes ont été adimensionnées en les divisant par  $M_\infty$ ). En haut à gauche :  $L^2 < 0$ , en haut à droite :  $L^2 = 0$ , en bas :  $L^2 > 0$ . L'intersection des deux surfaces correspond à  $(P + L)^2 = M_\infty^2$ .

que lorsque  $L^2 > 0$ , l'intersection entre les deux surfaces est vide, ce qui signifie que la contrainte  $P^2 = 0$  est incompatible avec l'annulation du dénominateur  $(P+L)^2$ . Par contre, cette annulation devient possible dès que  $L^2 \leq 0$ , ce qui se traduit sur la figure 9.3 par une intersection non vide entre les deux surfaces.<sup>6</sup> Comme on veut  $L$  mou pour les raisons expliquées plus haut, cela signifie que seule la région  $L^2 \leq 0$  est susceptible d'exhiber des divergences colinéaires. En particulier, cela permet de limiter l'étude qui va suivre aux processus contenus dans les régions en blanc de la figure 9.1, et d'exclure les processus du type Compton ou annihilation  $q\bar{q}$  qui seront sous-dominants. Compte tenu de la discussion sur les contre-terms qui a été faite au chapitre précédent, on n'aura pas à tenir compte des contre-terms ici car les contributions issues de la région  $L^2 \leq 0$  ne peuvent pas occasionner de double comptage avec des termes déjà inclus à une boucle.

Ce qui reste de ce chapitre est dédié à une détermination plus quantitative des termes exhibant ces fortes singularités colinéaires, et à une discussion de ces

<sup>5</sup>Sur cette figure, j'ai conservé la masse  $M_\infty$  (*i.e.* le dénominateur est  $(P + L)^2 - M_\infty^2$  et la contrainte est  $P^2 = M_\infty^2$ ), mais cela ne change rien aux conclusions.

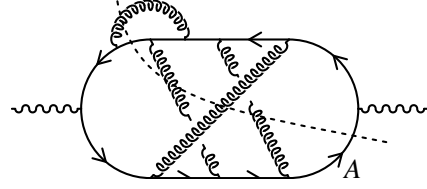
<sup>6</sup>Implicitement, j'ai supposé que l'impulsion  $L$  était molle. En effet, si  $L$  est dur, on peut avoir une intersection entre les deux surfaces même lorsque  $L^2 > 0$ , au niveau de la nappe inférieure de la surface  $P^2 = 0$ . Ce cas est cependant peu intéressant puisque  $L$  doit être mou afin d'avoir l'effet d'accroissement décrit plus haut.

singularités dans le cadre du formalisme des boucles dures.

## 9.4 Calcul des traces de Dirac

Comme annoncé plus haut, on peut mettre à profit la présence de singularités colinéaires très fortes pour donner une expression simple pour les termes de la trace de DIRAC qui contiennent ces singularités. On peut même être ici plus général que nécessaire pour le simple calcul des diagrammes de la figure 8.7. La technique que j'expose dans cette section permet d'extraire la portion de la trace qui domine dans le secteur colinéaire et infrarouge, pour tous les diagrammes du type de celui de la figure 9.4. Il s'agit en fait de tous les diagrammes comportant

FIG. 9.4 – Exemple de topologie pouvant être considérée par la méthode de cette section.



une boucle de quarks sur laquelle sont fixés les deux photons externes. Sur cette boucle peuvent ensuite venir se connecter un nombre arbitraire de gluons mous. D'après ce qui a été dit dans la section précédente, la région d'intérêt du point de vue des divergences colinéaires est celle où le quark est dur et les gluons sont mous.

De plus, comme on s'intéresse seulement à la partie imaginaire de ces diagrammes, il est obligatoirement traversé par une coupure. Soit  $A$  l'impulsion de l'un des deux quarks coupés (voir la figure 9.4). On peut alors prendre cette impulsion comme référence, et noter les impulsions de tous les autres quarks sous la forme  $A + B_i$ , où  $B_i$  est une combinaison linéaire des impulsions des gluons internes et des photons externes. Tous les  $B_i$  sont donc mous, alors que  $A$  est une impulsion dure. Ces impulsions entrent dans la trace par le biais des quantités  $\overline{A + B_i} \approx \overline{A} + B_i$ . À l'aide de cette relation, on peut simplement procéder à un développement en puissances des  $B_i$ , et s'arrêter au premier ordre non nul de ce développement.

D'importantes simplifications seront obtenues si on remarque que l'on a  $\overline{A}^2 = 0$ , puisque c'est par le quark d'impulsion  $A$  que passe la coupure. En particulier, dans les premiers ordres de ce développement, on a un petit nombre de  $B_i$  séparés par de longues séquences de  $\overline{A}$ . Par conséquent, on rencontrera fréquemment dans ce développement des chaînes de matrices  $\gamma$  intercalées avec des  $\overline{A}$ , que l'on peut contracter de la manière suivante

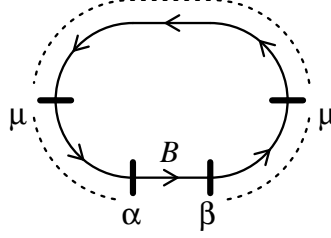
$$\overline{A} \gamma^{\mu_1} \overline{A} \dots \overline{A} \gamma^{\mu_n} \overline{A} = \overline{A} \prod_{i=1}^n 2 \overline{A}^{\mu_i} . \quad (9.13)$$

Cette relation permet de voir trivialement que le terme d'ordre 0 du développement que j'envisage ici donne une trace proportionnelle à<sup>7</sup>

$$\text{Tr} [\gamma_\mu \bar{A} \gamma^\mu \bar{A}] = -8\bar{A}^2 = 0 . \quad (9.14)$$

Passons maintenant à l'étude du terme d'ordre 1, qui est obtenu en gardant l'un des  $B_i$ , et en approximant toutes les autres impulsions de quarks par  $A$ . On a donc à évaluer la trace du diagramme représenté sur la figure 9.5. Si on

FIG. 9.5 – Notations pour le calcul du terme d'ordre 1 dans le développement en puissances des  $B_i$ . Les tirets en gras désignent la position des vertex  $q\bar{q}g$ , ou  $q\bar{q}\gamma$ . Les photons et les gluons n'ont pas été représentés. Les impulsions non écrites (sous les pointillés) sont toutes égales à  $A$ .



utilise la relation (9.13), la trace correspondant à ce terme du développement est proportionnelle à

$$\text{Tr} [\gamma_\mu \bar{A} \gamma^\mu \bar{A} \gamma^\beta \bar{B} \gamma^\alpha \bar{A}] = -2\text{Tr} [\bar{A} \bar{A} \gamma^\beta \bar{B} \gamma^\alpha \bar{A}] = 0 , \quad (9.15)$$

du fait de  $\bar{A}^2 = 0$ .<sup>8</sup> Par conséquent, il faut aller au moins jusqu'à l'ordre 2 dans les  $B_i$  pour rencontrer les premiers termes non nuls.

Etudions donc les corrections d'ordre 2. Commençons par la situation générique où les deux corrections  $B$  et  $B'$  ne sont pas adjacentes aux photons. Après utilisation de (9.13), on obtient alors une contribution du type de :

$$\begin{aligned} &\propto \text{Tr} [\gamma_\mu \bar{A} \gamma^\epsilon \bar{B}' \gamma^\delta \bar{A} \gamma^\mu \bar{A} \gamma^\beta \bar{B} \gamma^\alpha \bar{A}] \\ &= 4\bar{A}_\mu \bar{A}^\mu \text{Tr} [\gamma^\epsilon \bar{B}' \gamma^\delta \gamma^\beta \bar{B} \gamma^\alpha] \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (9.17)$$

<sup>7</sup>Rappelons qu'on doit également prendre la trace sur les indices de Lorentz portés par les deux photons.

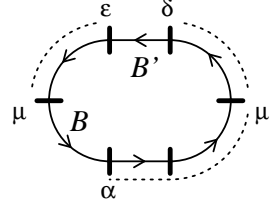
<sup>8</sup>Il existe un cas un peu particulier qui est celui où il y a un seul quark sur la ligne inférieure, de sorte que cette trace est proportionnelle à

$$\text{Tr} [\gamma_\mu \bar{A} \gamma^\mu \bar{B}] = -8\bar{A} \cdot B . \quad (9.16)$$

Il semble donc que la nullité des termes d'ordre 1 prouvée plus haut dans une situation générique soit ici prise en défaut. Toutefois, on peut s'en sortir si on prend pour impulsion de référence celle de ce quark coïncé entre les deux photons. Par définition, la correction  $B$  correspondante sera nulle.

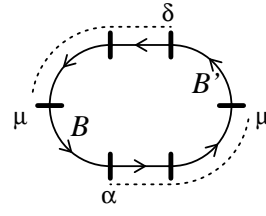


Dans le cas où le quark portant la correction  $B$  est adjacent à un photon, mais pas celui qui porte la correction  $B'$ , on a une contribution



$$\begin{aligned}
 &\propto \text{Tr} [\gamma_\mu \bar{A} \gamma^\epsilon B' \gamma^\delta \bar{A} \gamma^\mu \bar{A} \gamma^\alpha B] \\
 &= 2\bar{A}^\mu \text{Tr} [\gamma_\mu \bar{A} \gamma^\epsilon B' \gamma^\delta \bar{A} \gamma^\alpha B] \\
 &= 0 .
 \end{aligned} \tag{9.18}$$

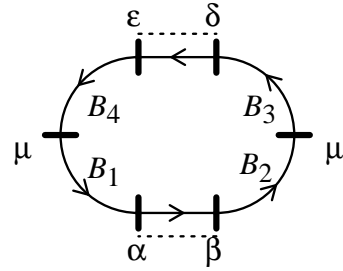
Les premières contributions non nulles viennent donc des termes d'ordre 2 où les deux corrections sont adjacentes aux photons externes. On peut en fait même simplifier un peu plus car certaines de ces contributions sont nulles. En effet, on a :



$$\begin{aligned}
 &\propto \text{Tr} [\gamma_\mu \bar{A} \gamma^\delta B' \gamma^\mu \bar{A} \gamma^\alpha B] \\
 &= -2\text{Tr} [B \gamma^\alpha \bar{A} \bar{A} \gamma^\delta B'] \\
 &= 0 .
 \end{aligned} \tag{9.19}$$

Il reste donc au plus quatre termes à considérer pour avoir les contributions d'ordre 2 dans ce développement. Ces quatre dernières contributions ne sont pas nulles en général, et leur somme donne le premier terme non nul du développement. Je vais utiliser les notations de la figure 9.6. Sur cette figure, les

FIG. 9.6 – Notations pour le calcul du terme d'ordre 2 dans le développement en puissances des  $B_i$ . Les tirets en gras désignent la position des vertex  $q\bar{q}g$ , ou  $q\bar{q}\gamma$ . Les photons et les gluons n'ont pas été représentés. Les impulsions non écrites sont toutes égales à  $A$ .



$B_i$  sont la correction à apporter à  $A$  pour avoir l'impulsion portée par le propagateur correspondant.<sup>9</sup> Si l'impulsion  $Q$  est l'impulsion du photon qui rentre

<sup>9</sup>Cette figure est un peu trompeuse dans la mesure où on pourrait comprendre qu'on est en train de calculer un terme d'ordre 4. En fait, deux seulement des quatre corrections qui y figurent sont à considérer simultanément.

dans le diagramme par la gauche, ces quatre corrections sont reliées par les relations suivantes :

$$B_4 = B_1 - Q \quad (9.20\text{-a})$$

$$B_3 = B_2 - Q . \quad (9.20\text{-b})$$

Avec ces notations, on obtient le résultat suivant pour les termes d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
64 \left[ \prod_e 2\bar{A}^e \right] \Big\{ & (B_1 - B_3) \cdot (B_2 - B_4) \bar{A}^\alpha \bar{A}^\beta \bar{A}^\delta \bar{A}^\epsilon \\
& + (\bar{A} \cdot B_1)(B_4^\alpha - B_2^\alpha) \bar{A}^\beta \bar{A}^\delta \bar{A}^\epsilon + (\bar{A} \cdot B_2)(B_3^\beta - B_1^\beta) \bar{A}^\alpha \bar{A}^\delta \bar{A}^\epsilon \\
& + (\bar{A} \cdot B_3)(B_2^\delta - B_4^\delta) \bar{A}^\alpha \bar{A}^\beta \bar{A}^\epsilon + (\bar{A} \cdot B_4)(B_1^\epsilon - B_3^\epsilon) \bar{A}^\alpha \bar{A}^\beta \bar{A}^\delta \\
& + (\bar{A} \cdot B_1)(\bar{A} \cdot B_2) g^{\alpha\beta} \bar{A}^\delta \bar{A}^\epsilon + (\bar{A} \cdot B_3)(\bar{A} \cdot B_4) g^{\delta\epsilon} \bar{A}^\alpha \bar{A}^\beta \\
& - (\bar{A} \cdot B_1)(\bar{A} \cdot B_4) g^{\alpha\epsilon} \bar{A}^\beta \bar{A}^\delta - (\bar{A} \cdot B_2)(\bar{A} \cdot B_3) g^{\beta\delta} \bar{A}^\alpha \bar{A}^\epsilon \Big\} , \quad (9.21)
\end{aligned}$$

où le produit qui figure en préfacteur de cette formule est étendu à tous les vertex  $q\bar{q}g$  qui n'apparaissent pas explicitement sur la figure 9.6. On a donc obtenu ici une formule relativement compacte donnant la trace dans l'approximation où les gluons sont mous pour tout diagramme du type de celui qui est représenté sur la figure 9.4. Il convient cependant de noter les points suivants :

- Cette formule n'est applicable qu'au calcul de la partie imaginaire du tenseur de polarisation du photon, puisqu'on a supposé qu'on pouvait choisir une impulsion de quark  $A$  telle que  $\bar{A}^2 = 0$ .
- Cette formule donne la trace sur les indices de LORENTZ du tenseur de polarisation du photon.
- Lors de l'application de cette formule, il faut avoir à l'esprit le fait que la signification des  $B_i$  en termes des impulsions des gluons et du photon dépend de la position du propagateur coupé dont on a choisi d'appeler  $A$  l'impulsion.
- Des simplifications supplémentaires peuvent survenir, car les produits scalaires du type de  $\bar{A} \cdot B_i$  peuvent compenser la singularité d'un dénominateur. Puisque notre but est d'isoler les termes les plus singuliers, on doit ignorer une telle contribution. Toutefois, ces compensations sont à étudier au cas par cas. En d'autres termes, on a jusqu'à présent utilisé uniquement le fait que le photon et les gluons sont mous, mais pas le fait que le photon est réel.
- Pour établir cette formule, nous avons utilisé seulement l'un des deux quarks coupés. Le fait qu'un deuxième propagateur de quark soit coupé peut induire des simplifications supplémentaires, qui dépendent toutefois de sa position dans le diagramme.

Afin d'illustrer cette formule, considérons un exemple assez simple, qui est celui du diagramme en échelle représenté sur la figure 9.7. Cet exemple contient comme un cas particulier la correction de vertex qui apparaît sur la figure 8.7. L'impulsion  $A$  doit être celle de l'un des deux propagateurs coupés. On peut donc choisir  $A \equiv P$ . Ensuite, afin de faire la connexion avec les notations de la

FIG. 9.7 – Exemple simple d'application de la formule (9.21).

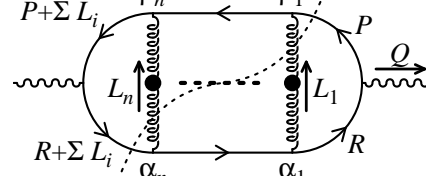


figure 9.6, on doit noter

$$\begin{aligned}
 B_1 &= Q + \sum_{i=1}^n L_i \\
 B_2 &= Q \\
 B_3 &= 0 \\
 B_4 &= \sum_{i=1}^n L_i .
 \end{aligned} \tag{9.22}$$

Ensuite, il est immédiat de vérifier que  $\overline{A} \cdot B_2$  est supprimé lorsque  $Q$  est colinéaire à  $P$ . De même  $\overline{A} \cdot B_4$  est supprimé à cause de la contrainte due au deuxième quark coupé. On voit donc que l'on peut négliger tous les  $\overline{A} \cdot B_i$  dans la formule (9.21), de sorte qu'il ne reste que

$$4 \left[ \prod_{i=1}^n 4 \overline{P}^{\alpha_i} \overline{P}^{\beta_i} \right] \left( Q^2 - \left( \sum_{i=1}^n L_i \right)^2 \right) . \tag{9.23}$$

Le  $Q^2$  qui apparaît dans cette formule peut être considéré comme nul, puisqu'on regarde uniquement des photons réels ou de très petite masse invariante dans ce chapitre. On peut noter sur ce résultat une propriété qui est valable pour tous les diagrammes où la coupure coupe la boucle de quarks au niveau de propagateurs adjacents aux photons externes : la trace est proportionnelle à la quantité  $(\sum L_i)^2$ , où  $\sum L_i$  est la somme des impulsions des gluons qui partent de la ligne inférieure pour rejoindre la ligne supérieure.

Ce résultat est directement applicable aux diagrammes de la figure 8.7 qui nous intéressent dans ce chapitre. Pour le diagramme qui correspond à une correction de vertex, on obtient la trace

$$-16 \overline{P}^\rho \overline{P}^\sigma L^2 , \tag{9.24}$$

et on obtient une trace nulle à ce niveau d'approximation pour la topologie qui correspond à une correction de self-énergie. À ce stade du calcul, la masse  $M_\infty$  peut être négligée dans cette trace, ce qui revient à y remplacer  $\overline{P}$  par  $P$ .

## 9.5 Photons réels mous

### 9.5.1 Expression du tenseur de polarisation

On a donc maintenant tous les ingrédients pour calculer le taux de production de photons mous réels. Si on contracte la trace obtenue dans la formule (9.24) avec les projecteurs transverse et longitudinal donnés par les équations (7.16-a) et (7.16-b), on obtient dans l'approximation colinéaire

$$-16L^2 P^\rho P^\sigma P_{\rho\sigma}^T(L) \approx -16 \frac{r^2}{l^2} (L^2)^2 \quad (9.25-a)$$

$$-16L^2 P^\rho P^\sigma P_{\rho\sigma}^L(L) \approx +16 \frac{r^2}{l^2} (L^2)^2, \quad (9.25-b)$$

où j'ai utilisé l'approximation  $\cos \theta' \approx l_o/l$ <sup>10</sup> valide dans la limite colinéaire (voir (9.7)).

Ensuite, il faut calculer les deux dénominateurs qui entrent dans l'élément de matrice. On a tout d'abord<sup>11</sup>

$$R^2 - M_\infty^2 = 2Q \cdot R \approx 2q_o p \left[ 1 - \cos \theta + \frac{M_\infty^2}{2p^2} \right]. \quad (9.26)$$

Le second dénominateur dépend quant à lui de l'angle azimutal  $\phi$ . Toutefois, compte tenu des approximations faites au numérateur,  $(P + L)^2 - M_\infty^2$  est la seule quantité où reste une dépendance vis à vis de cet angle. On peut donc faire l'intégrale sur  $\phi$  dès maintenant, ce qui permet d'avoir quelques simplifications :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{(P + L)^2 - M_\infty^2} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{-2Q \cdot L - 2Q \cdot R} \\ &\approx \frac{1}{2q_o p} \left[ \left( 1 - \cos \theta + \frac{M_\infty^2}{2p^2} + \frac{L^2}{2p^2} \right)^2 - \frac{L^2}{p^2} \frac{M_\infty^2}{p^2} \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (9.27)$$

En comparant les deux formules précédentes, on peut retrouver quantitativement ce qui a été annoncé plus haut : il faut que  $L$  soit une impulsion molle pour que les deux singularités colinéaires soient voisines l'une de l'autre. On peut maintenant être plus précis. En effet, on voit qu'il faut que  $L$  reste d'un ordre de grandeur comparable à celui du régulateur des divergences colinéaires qui est  $M_\infty$ . On doit donc s'attendre à ce que  $M_\infty$  joue le rôle d'une borne supérieure effective pour l'intégrale sur l'impulsion du gluon.

<sup>10</sup>On voit que dans la limite colinéaire la condition  $-1 \leq \cos \theta' \leq 1$  se réduit à  $L^2 < 0$ . On retrouve donc le fait que ces divergences colinéaires très fortes ne peuvent survenir que sous le cône de lumière. Cette remarque nous dit aussi qu'on peut se passer des détails des domaines autorisés représentés sur la figure 9.1, et qu'il est suffisant d'imposer  $L^2 < 0$ .

<sup>11</sup>Les deux dénominateurs sont donnés ici lorsque  $p_o = +\omega_p$ . On peut ensuite remarquer que les régions  $p_o = +\omega_p$  et  $p_o = -\omega_p$  vont donner des résultats identiques. Je vais donc faire les calculs pour l'une d'entre elles, et multiplier le résultat par un facteur 2 pour tenir compte de l'autre.

Il est maintenant facile de collecter tout les résultats obtenus plus haut (élément de matrice donné par (8.8), dénominateurs donnés par (9.26) et (9.27), et traces données par (9.25-a) et (9.25-b)) pour obtenir l'expression suivante

$$\begin{aligned} \text{Im } {}^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) &\approx (-1)_T \frac{e^2 g^2 N C_F}{8\pi^4} \frac{1}{q_0} \int_0^\infty dp n'_F(p) \\ &\times \int_0^{+\infty} l^4 dl \int_{-1}^{+1} dx n_B(lx) \rho_{T,L}(lx, l) (1-x^2)^2 \int_0^2 du \left[ u + \frac{M_\infty^2}{2p^2} \right]^{-1} \\ &\times \left[ \left( u + \frac{M_\infty^2}{2p^2} + \frac{l^2(x^2-1)}{2p^2} \right)^2 + \frac{l^2(1-x^2)M_\infty^2}{p^4} \right]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (9.28)$$

où je note  $x \equiv l_o/l$ ,  $u \equiv 1 - \cos \theta$ , et où le symbole  $(-1)_T$  désigne une signe moins supplémentaire dans la contribution du gluon transverse. Dans cette équation,  $\rho_{T,L}$  est la fonction spectrale du gluon effectif, qui est reliée à la discontinuité du propagateur effectif par

$$\rho_{T,L}(l_o, l) \equiv {}^*\Delta_{T,L}^R(l_o, \mathbf{l}) - {}^*\Delta_{T,L}^A(l_o, \mathbf{l}). \quad (9.29)$$

A l'aide des changements de variables successifs suivants

$$\begin{aligned} u &\equiv \frac{lM_\infty}{p^2} \sqrt{1-x^2} t + \frac{l^2(1-x^2)}{2p^2} - \frac{M_\infty^2}{2p^2} \\ t &\equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_0}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha_0} \right) \quad \text{avec} \quad \alpha_0 \equiv \frac{M_\infty}{l\sqrt{1-x^2}} \\ \alpha &\equiv \frac{1 - \sqrt{1-u'}}{2}, \end{aligned} \quad (9.30)$$

et en utilisant le fait que l'intégrale sur la variable  $u$  est dominée par les petites valeurs de  $u$  du fait des divergences colinéaires, on peut mettre la formule (9.28) sous la forme

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi {}^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) &\approx (-1)_T \frac{e^2 g^2 N C_F}{2\pi^4} \frac{1}{q_0} \int_0^\infty p^2 dp n'_F(p) \\ &\times \int_0^{+\infty} l^4 dl \int_{-1}^{+1} dx n_B(lx) \rho_{T,L}(lx, l) (1-x^2)^2 \\ &\times \int_0^1 \frac{du'}{\sqrt{1-u'}} \frac{1}{4M_\infty^2 + l^2(1-x^2)u'}. \end{aligned} \quad (9.31)$$

A ce niveau, les intégrales sur  $r$  et sur  $u'$  sont élémentaires, ce qui permet de réduire considérablement l'expression précédente. Si on utilise<sup>12</sup>

$$\int_0^{+\infty} dp p^2 n'_F(p) = -\frac{\pi^2 T^2}{6}, \quad (9.32)$$

ainsi que

$$\int_0^1 \frac{du'}{\sqrt{1-u'}} \frac{1}{4M_\infty^2 + l^2(1-x^2)u'} = 2 \frac{\tanh^{-1} \sqrt{-L^2/(4M_\infty^2 - L^2)}}{\sqrt{-L^2(4M_\infty^2 - L^2)}}, \quad (9.33)$$

il est trivial d'obtenir ensuite la formule<sup>13</sup>

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^{RA}{}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) &\approx -\frac{e^2 g^2 N C_F T^3}{3\pi^2 q_0} \int_0^1 \frac{dx}{x} \left| \tilde{I}_{T,L}(x) \right| \\ &\times \int_0^{+\infty} dw \frac{\sqrt{w/(w+4)} \tanh^{-1} \sqrt{w/(w+4)}}{(w + \tilde{R}_{T,L}(x))^2 + (\tilde{I}_{T,L}(x))^2}, \end{aligned} \quad (9.35)$$

avec les notations

$$\begin{aligned} w &\equiv \frac{-L^2}{M_\infty^2} \\ \tilde{I}_{T,L}(x) &\equiv \frac{\text{Im } \Pi_{T,L}^{HTL}(x)}{M_\infty^2}, \quad \tilde{R}_{T,L}(x) \equiv \frac{\text{Re } \Pi_{T,L}^{HTL}(x)}{M_\infty^2}. \end{aligned} \quad (9.36)$$

## 9.5.2 Usage de règles de somme

Contrairement à l'approche de la section précédente, où à partir de (9.31) j'ai fait les intégrales sur  $r$  et  $u'$ , une autre possibilité consiste à effectuer l'intégrale sur  $r$  comme avant, mais à effectuer ensuite l'intégration sur  $x$  entre  $-1$  et  $+1$ . Cette intégrale sur  $x$  se fait sans problème majeur à l'aide des règles de somme<sup>14</sup> qui sont exposées dans l'appendice C. En effet, la fonction qui est en facteur de la fonction spectrale  $\rho_{T,L}(lx, l)$  est une fraction rationnelle de la variable  $x$ . D'après ce qui est exposé dans l'annexe C, il suffit d'extraire la partie principale

<sup>12</sup>On pourra voir l'appendice B pour le calcul de cette intégrale.

<sup>13</sup>Ici, on utilise le fait que lorsque  $L^2 < 0$ , la fonction spectrale du gluon effectif peut s'écrire

$$\rho_{T,L}(L) \stackrel{L^2 < 0}{=} \frac{-2\text{Im } \Pi_{T,L}^{HTL}(L)}{(L^2 - \text{Re } \Pi_{T,L}^{HTL}(L))^2 + (\text{Im } \Pi_{T,L}^{HTL}(L))^2}. \quad (9.34)$$

<sup>14</sup>Toutefois, comme nous avons seulement à intégrer entre  $-1$  et  $1$ , il faut retrancher la contribution des pôles (voir l'annexe C).

de cette fraction, qui est un polynôme en  $x$ , et d'écrire le reste comme un terme de la forme  $(x^2 - y^2)^{-1}$  (ici,  $y^2 = 1 + 4M_\infty^2/l^2 u'^2$ ).

On note que l'absence de masse de DEBYE pour les modes transverses implique que le résultat n'est pas totalement symétrique pour les contributions transverse et longitudinale. Plus spécifiquement, on obtient pour la contribution transverse :

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^{RA}{}_{\mu}{}^{\mu}(Q)|_T &\approx -\frac{e^2 g^2 T^3}{3\pi q_0} \int_0^{+\infty} \frac{dl}{l} \int_0^1 du'' \left\{ \frac{m_g^2}{l^2 + m_g^2} \frac{1}{z^2 - u'^2} \right. \\ &+ Z_T \frac{\omega_T^2 - l^2}{\omega_T^2} \frac{1}{1 - \frac{4M_\infty^2}{\omega_T^2 - l^2} - u'^2} - \frac{4M_\infty^2}{l^2 + 4M_\infty^2} \frac{1}{1 - \frac{4M_\infty^2}{\text{Re } \Pi_T(z)} - u'^2} \\ &\left. + \left( \frac{4M_\infty^2}{l^2 + 4M_\infty^2} - \frac{m_g^2}{l^2 + m_g^2} \right) \frac{1}{1 - \frac{4M_\infty^2}{m_g^2} - u'^2} \right\}, \end{aligned} \quad (9.37)$$

et pour la contribution longitudinale :

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^{RA}{}_{\mu}{}^{\mu}(Q)|_L &\approx \frac{e^2 g^2 T^3}{3\pi q_0} \int_0^{+\infty} \frac{dl}{l} \int_0^1 du'' \left\{ \left( \frac{m_g^2}{l^2 + m_g^2} - \frac{3m_g^2}{l^2 + 3m_g^2} \right) \frac{1}{z^2 - u'^2} \right. \\ &+ Z_L \frac{\omega_L^2 - l^2}{\omega_L^2} \frac{1}{1 - \frac{4M_\infty^2}{\omega_L^2 - l^2} - u'^2} - \frac{4M_\infty^2}{l^2 + 4M_\infty^2} \frac{1}{1 - \frac{4M_\infty^2}{\text{Re } \Pi_L(z)} - u'^2} \\ &\left. + \left( \frac{4M_\infty^2}{l^2 + 4M_\infty^2} - \frac{m_g^2}{l^2 + m_g^2} \right) \frac{1}{1 - \frac{4M_\infty^2}{m_g^2} - u'^2} \right\}, \end{aligned} \quad (9.38)$$

où je note  $u'' \equiv 1 - u'^2$  et  $z \equiv \sqrt{1 + 4M_\infty^2/l^2}$ . A ce stade, on voit que l'intégration sur la variable  $u''$  est élémentaire. Cela va donc nous permettre de réduire à une intégrale unidimensionnelle l'expression de  $\text{Im } \Pi^{RA}{}_{\mu}{}^{\mu}$ . Toutefois, pour effectuer explicitement cette intégrale, il convient de connaître les signes des quantités  $1 - 4M_\infty^2/\text{Re } \Pi_{T,L}(z)$ ,  $1 - 4M_\infty^2/(\omega_{T,L}^2 - l^2)$  et  $1 - 4M_\infty^2/m_g^2$ . En effet, ces signes sont nécessaires pour savoir si on a une arc-tangente ou une arc-tangente hyperbolique. Il est facile de vérifier que si  $3/8 < M_\infty^2/m_g^2$ , alors ces trois quantités sont négatives<sup>15</sup>, quelle que soit la valeur de  $l$ . Il se trouve par ailleurs que l'on est dans ce cas pour une théorie de jauge  $SU(3)$ , avec un nombre de saveurs raisonnable (inférieur à dix). La contribution transverse devient alors [125] :

$$\text{Im } \Pi^{RA}{}_{\mu}{}^{\mu}(Q)|_T \approx -\frac{e^2 g^2 T^3}{3\pi q_0} \int_0^{+\infty} \frac{dl}{l} \left\{ \frac{m_g^2}{l^2 + m_g^2} \frac{1}{z} \tanh^{-1} \frac{1}{z} \right.$$

<sup>15</sup>Si cette condition sur le rapport des masses thermiques n'est pas satisfaite, alors certains des signes requis vont dépendre de la valeur de la variable  $l$ , et la situation devient beaucoup plus compliquée.

$$\begin{aligned}
& + \frac{4M_\infty^2}{l^2 + 4M_\infty^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{4M_\infty^2}{\text{Re } \Pi_T(z)} - 1}} \tan^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{4M_\infty^2}{\text{Re } \Pi_T(z)} - 1}} \right) \\
& - Z_T \frac{\omega_T^2 - l^2}{\omega_T^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{4M_\infty^2}{\omega_T^2 - l^2} - 1}} \tan^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{4M_\infty^2}{\omega_T^2 - l^2} - 1}} \right) \\
& + \left( \frac{4M_\infty^2}{l^2 + 4M_\infty^2} - \frac{m_g^2}{l^2 + m_g^2} \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{4M_\infty^2}{m_g^2} - 1}} \tan^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{4M_\infty^2}{m_g^2} - 1}} \right) \Big\} \quad (9.39)
\end{aligned}$$

La contribution longitudinale est quant à elle :

$$\begin{aligned}
\text{Im } \Pi^{RA}{}_\mu{}^\mu(Q)|_L & \approx \frac{e^2 g^2 T^3}{3\pi q_0} \int_0^{+\infty} \frac{dl}{l} \left\{ \left( \frac{m_g^2}{l^2 + m_g^2} - \frac{3m_g^2}{l^2 + 3m_g^2} \right) \frac{1}{z} \tanh^{-1} \frac{1}{z} \right. \\
& + \frac{4M_\infty^2}{l^2 + 4M_\infty^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{4M_\infty^2}{\text{Re } \Pi_L(z)} - 1}} \tan^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{4M_\infty^2}{\text{Re } \Pi_L(z)} - 1}} \right) \\
& - Z_L \frac{\omega_L^2 - l^2}{\omega_L^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{4M_\infty^2}{\omega_L^2 - l^2} - 1}} \tan^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{4M_\infty^2}{\omega_L^2 - l^2} - 1}} \right) \\
& \left. + \left( \frac{4M_\infty^2}{l^2 + 4M_\infty^2} - \frac{m_g^2}{l^2 + m_g^2} \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{4M_\infty^2}{m_g^2} - 1}} \tan^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{4M_\infty^2}{m_g^2} - 1}} \right) \right\} \quad (9.40)
\end{aligned}$$

On voit donc qu'on a pu réduire le résultat à une intégrale unidimensionnelle.<sup>16</sup> Toutefois, cela s'est fait au prix d'expressions relativement lourdes, dans lesquelles des quantités que l'on ne connaît pas analytiquement sont cachées sous la forme des résidus  $Z_{T,L}$  et des solutions  $\omega_{T,L}$  des équations de dispersion.

### 9.5.3 Ordre de grandeur du résultat

Après cette section destinée à montrer combien sont jolies les formules qu'on peut obtenir avec les règles de somme, je vais discuter les principales propriétés du résultat, dans sa forme donnée par la formule (9.35). En effet, bien qu'étant une intégrale double, cette expression est beaucoup plus compacte que ce l'on obtient à l'aide des règles de somme. Un autre avantage est de donner une expression identique pour les contributions transverse et longitudinale, ce qui permet d'en faire une étude unifiée.

<sup>16</sup>La terminologie "intégrale simple", bien que fréquemment usitée pour désigner ce type d'objet, m'a paru un peu prétentieuse ici et j'ai préféré l'éviter.



On peut tout d'abord noter que la quantité

$$J_{T,L} \equiv \int_0^1 \frac{dx}{x} \left| \tilde{I}_{T,L}(x) \right| \int_0^{+\infty} dw \frac{\sqrt{w/(w+4)} \tanh^{-1} \sqrt{w/(w+4)}}{(w + \tilde{R}_{T,L}(x))^2 + (\tilde{I}_{T,L}(x))^2} \quad (9.41)$$

est un préfacteur purement numérique qui est en principe d'ordre 1. Ces nombres sont des fonctions décroissantes du rapport  $M_\infty/m_g$ . Elles ne dépendent d'aucune autre quantité. En particulier, cela signifie qu'ils ne dépendent ni de la constante de couplage ni de la température, mais seulement du nombre de couleurs et de saveurs que l'on considère.

En résumé, on peut dire que la contribution du bremsstrahlung pour la production de photons réels mous donne donc le résultat suivant :

$$\text{Im } \Pi^{\text{RA}}{}_\mu{}^\mu(q_o, \mathbf{q}) \approx -\frac{e^2 g^2 N C_F}{3\pi^2} (J_T + J_L) \frac{T^3}{q_o}. \quad (9.42)$$

On voit donc que cette contribution donne un ordre de grandeur en  $e^2 g^2 T^3/q_o$  pour la partie imaginaire du tenseur de polarisation du photon. Si on compare cet ordre de grandeur au résultat obtenu à une boucle (équation (9.4)), on voit qu'on a la même dépendance vis à vis de l'énergie du photon, mais qu'on a gagné un facteur  $1/g^2$ . Ce facteur est une conséquence directe des divergences colinéaires que l'on rencontre à deux boucles.

## 9.5.4 Propriétés infrarouges

### Finitude du résultat

Une autre aspect intéressant de ce résultat est lié à ses propriétés dans le secteur où l'impulsion du gluon tend vers zéro. En effet, on a vu dans la section 7.6.1 que l'on pouvait rencontrer des difficultés avec les gluons effectifs transverses de genre espace.

Commençons donc par montrer que les quantités définies par les relations (9.41) sont finies. Pour prouver que cette grandeur est finie dans l'infrarouge, on peut partir de la majoration<sup>17</sup>

$$\sqrt{\frac{w}{w+4}} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{w}{w+4}} \leq \frac{w}{4}. \quad (9.44)$$

Cependant, si on utilise cette majoration, il faut faire attention à garder une borne supérieure finie  $w^*$  pour l'intégration sur  $w$ . En effet, cette majoration

---

<sup>17</sup>Il s'agit de la meilleure majoration possible à petit  $w$ , puisqu'on a en fait

$$\sqrt{\frac{w}{w+4}} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{w}{w+4}} \underset{w \ll 1}{\approx} \frac{w}{4}. \quad (9.43)$$

détérioré drastiquement le comportement de l'intégrand dans le secteur ultra-violet.<sup>18</sup> Si  $J_{T,L}^{w*}$  désigne la valeur de  $J_{T,L}$  obtenue lorsqu'on utilise une borne supérieure  $w^*$ ,<sup>19</sup> on a l'inégalité suivante

$$0 \leq J_{T,L}^{w*} \leq \int_0^1 \frac{dx}{4x} \left| \tilde{I}_{T,L}(x) \right| \int_0^{w^*} dw \frac{w}{(w + \tilde{R}_{T,L}(x))^2 + (\tilde{I}_{T,L}(x))^2} . \quad (9.46)$$

Il est donc suffisant de montrer que le terme de droite de cette inégalité est fini dans l'infrarouge. Dans ce terme, l'intégrale sur  $w$  est élémentaire, et donne

$$\begin{aligned} \int_0^{w^*} dw \frac{w}{(w + \tilde{R}_{T,L}(x))^2 + (\tilde{I}_{T,L}(x))^2} &= \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{(w^* + \tilde{R}_{T,L}(x))^2 + (\tilde{I}_{T,L}(x))^2}{(\tilde{R}_{T,L}(x))^2 + (\tilde{I}_{T,L}(x))^2} \right] \\ &- \frac{\tilde{R}_{T,L}(x)}{|\tilde{I}_{T,L}(x)|} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{w^* + \tilde{R}_{T,L}(x)}{|\tilde{I}_{T,L}(x)|} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{\tilde{R}_{T,L}(x)}{|\tilde{I}_{T,L}(x)|} \right) \right] . \end{aligned} \quad (9.47)$$

A ce stade, il est trivial de vérifier que le logarithme donne un résultat fini une fois intégré sur  $x$ . Pour ce qui est du terme contenant la différence des deux arc-tangentes, il suffit de remarquer que cette différence est toujours bornée, et qu'en outre elle tend vers zéro lorsque  $\tilde{R}_{T,L}(x)/|\tilde{I}_{T,L}(x)|$  tend vers l'infini, compensant ainsi toute éventuelle singularité du préfacteur.

### Limite $m_g \ll M_\infty$

Une fois que la finitude de l'intégrale est acquise, on peut s'intéresser à ses propriétés dans certaines limites [125]. Les limites intéressantes sont celles où l'on fait tendre vers zéro les masses thermiques<sup>20</sup>  $m_g$  ou  $M_\infty$  afin de faire resurgir les singularités qu'elles écrantent. Notons  $a \equiv m_g^2/M_\infty^2$  le rapport de ces masses thermiques, qui est la seule quantité de laquelle  $J_{T,L}$  dépend.

Commençons par la limite  $a \rightarrow 0$ , ce qui revient à négliger la masse thermique du gluon échangé. Il est alors immédiat de vérifier que l'intégration sur  $w$  dans l'expression de  $J_{T,L}$  est dominée par les petites valeurs de  $w \sim a$ , de sorte que

---

<sup>18</sup>Dans la région ultraviolette, on peut utiliser la relation

$$\sqrt{\frac{w}{w+4}} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{w}{w+4}} \underset{w \gg 1}{\approx} \frac{1}{2} \ln(w) \quad (9.45)$$

pour prouver que l'intégrale sur  $w$  est également finie dans l'ultraviolet, puisqu'elle se comporte comme  $\int^{+\infty} dw \ln(w)/w^2$ .

<sup>19</sup>On a par conséquent  $J_{T,L} = \lim_{w^* \rightarrow +\infty} J_{T,L}^{w*}$ .

<sup>20</sup>En principe, les masses thermiques du gluon et du quark ne sont pas indépendantes une fois que la température et la constante de couplage sont fixées. Toutefois, dans cette section je considère formellement ces quantités comme indépendantes, et en particulier que je peux faire tendre l'une d'entre elles vers zéro en gardant l'autre finie.

l'on peut approximer<sup>21</sup>

$$\begin{aligned}
J_{T,L} &\underset{a \rightarrow 0}{\approx} \int_0^1 \frac{dx}{4x} \left| \tilde{I}_{T,L}(x) \right| \int_0^1 dw \frac{w}{(w + \tilde{R}_{T,L}(x))^2 + (\tilde{I}_{T,L}(x))^2} \\
&\underset{a \rightarrow 0}{\approx} \ln\left(\frac{1}{a}\right) \int_0^1 \frac{dx}{4x} \left| \tilde{I}_{T,L}(x) \right| \\
&= \begin{cases} \frac{\pi}{8} a \ln\left(\frac{1}{a}\right) & \text{(transverse)} \\ \frac{\pi}{4} a \ln\left(\frac{1}{a}\right) & \text{(longitudinal)} \end{cases} . \tag{9.48}
\end{aligned}$$

On constate donc que le résultat va tendre vers zéro si l'on fait tendre vers zéro la masse thermique des gluons. A fortiori, il n'y a aucune singularité dans cette limite. Ce fait peut être expliqué de la façon suivante : le processus de bremsstrahlung qui est dominant dans ce calcul apparaît dans les diagrammes de la figure 8.7 grâce aux corrections de boucle dure introduites sur le propagateur du gluon. Par conséquent, faire tendre la masse thermique du gluon vers zéro revient à négliger ces corrections de boucle dure et à faire disparaître le bremsstrahlung de ces diagrammes.

**Limite**  $M_\infty \ll m_g$

La limite  $a \rightarrow +\infty$ , qui correspond à l'annulation de la masse thermique des quarks, celle du gluon restant fixée, va en principe nous redonner les singularités colinéaires discutées plus haut. Ici, on peut se convaincre aisément du fait que la contribution dominante va venir des grandes valeurs de  $w$ . Plus précisément, les valeurs de  $w$  comprises entre 0 et 1 donnent une contribution de l'ordre de  $1/a$ , qui tend vers zéro lorsque  $a \rightarrow +\infty$ . On peut donc faire l'approximation suivante :<sup>22</sup>

$$\begin{aligned}
J_{T,L} &\underset{a \rightarrow +\infty}{\approx} \int_0^1 \frac{dx}{2x} \left| \tilde{I}_{T,L}(x) \right| \int_1^{+\infty} dw \frac{\ln(w)}{(w + \tilde{R}_{T,L}(x))^2 + (\tilde{I}_{T,L}(x))^2} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^1 \frac{dy}{y} \tan^{-1} \left( \frac{y |\tilde{I}_{T,L}(x)|}{1 + y \tilde{R}_{T,L}(x)} \right) . \tag{9.49}
\end{aligned}$$

A ce stade, on peut vérifier que les termes dominants viennent de la région où  $x$  est petit, ce qui permet de faire un développement limité des fonctions  $\tilde{I}_{T,L}$

---

<sup>21</sup>La borne supérieure ne joue aucun rôle ici tant qu'elle reste grande devant  $a$ . Le choix de la valeur 1 est donc totalement arbitraire. Ensuite, on montre que la portion d'intégrale qui va de cette borne (ici 1) à  $+\infty$  est négligeable lorsque  $a \rightarrow 0$ .

<sup>22</sup>Pour obtenir ce résultat, on utilise la relation approchée (9.45), on fait ensuite une intégration par parties suivie du changement de variables  $w = 1/y$ .

et  $\tilde{R}_{T,L}$  au voisinage de  $x = 0$ . A l'aide des expressions (7.37), on trouve les développements suivants

$$\tilde{R}_L(x) \underset{x \ll 1}{\approx} 3a \quad (9.50\text{-a})$$

$$|\tilde{I}_L(x)| \underset{x \ll 1}{\approx} \frac{3}{2}\pi ax \quad (9.50\text{-b})$$

$$\tilde{R}_T(x) \underset{x \ll 1}{\approx} \frac{3}{2}ax^2 \quad (9.50\text{-c})$$

$$|\tilde{I}_T(x)| \underset{x \ll 1}{\approx} \frac{3}{4}\pi ax . \quad (9.50\text{-d})$$

En faisant l'approximation de la dominance par les petits  $x$ , on obtient dans le cas longitudinal

$$J_L \underset{a \rightarrow +\infty}{\approx} \frac{3}{4}\pi a \int_0^1 dx dy \frac{1}{1+3ay} \approx \frac{\pi}{4} \ln(a) . \quad (9.51)$$

Dans le cas transverse, les mêmes approximations conduisent à un résultat un peu différent du fait du comportement en  $x^2$  de la fonction  $\tilde{R}_T(x)$ . On obtient plutôt :

$$J_T \underset{a \rightarrow +\infty}{\approx} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx dy}{xy} \tan^{-1} \left( \frac{3}{2}axy \right) \underset{a \rightarrow +\infty}{\approx} \frac{\pi}{4} \ln(a)^2 . \quad (9.52)$$

Passons maintenant à l'interprétation des résultats précédents. On note tout d'abord que l'on retrouve des singularités logarithmiques lorsque la masse thermique du quark tend vers zéro, et que ces singularités sont plus fortes dans le cas de la contribution du gluon transverse.

Le facteur  $\ln(m_g^2/M_\infty^2)$  qui est commun aux deux contributions peut être interprété comme un résidu des singularités colinéaires discutées plus haut. Le fait qu'on retrouve ici seulement un logarithme, plutôt qu'une divergence suivant une loi de puissance, vient du fait que la distance entre les deux pôles ne tend pas vers zéro lorsque  $M_\infty \rightarrow 0$ . C'est donc une particularité du terme qui domine le taux de production de photons mous réels, qui possède deux pôles très proches, mais néanmoins distincts.

Dans la contribution du gluon transverse, on voit que l'on a un deuxième facteur logarithmiquement divergent. On peut se convaincre assez facilement du fait que cette singularité additionnelle est de nature infrarouge. A cet effet, on peut reprendre les estimations précédentes en incluant à la main une masse magnétique dans le propagateur effectif du gluon transverse. Naturellement, on ne sait pas précisément qu'elle est l'expression de la self-énergie du gluon qui donne cette masse magnétique. Toutefois, on n'a ici besoin que de la modification qu'induit la masse magnétique dans la région où se manifeste la singularité, *i.e.* dans la limite  $x \rightarrow 0$ . Comme cette masse magnétique n'est rien d'autre qu'une masse de DEBYE pour les modes transverses, elle peut être définie de la manière suivante :

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} \Pi_T(k_o = 0, \mathbf{k}) = m_{\text{mag}}^2 . \quad (9.53)$$

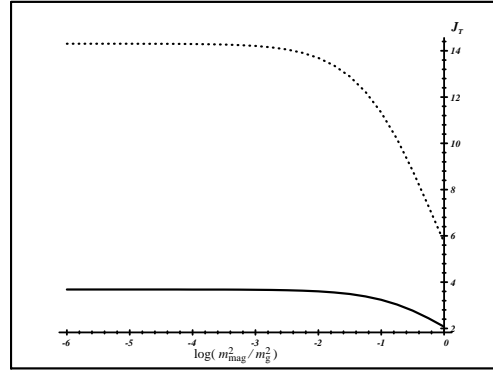
Si on se place ensuite formellement dans le régime  $M_\infty \ll m_{\text{mag}} \ll m_g$ , on peut vérifier que la relation (9.52) est remplacée par

$$J_T \underset{a \rightarrow +\infty}{\approx} \frac{\pi}{4} \ln(a) \ln \left( \frac{m_g^2}{m_{\text{mag}}^2} \right). \quad (9.54)$$

On voit donc que le logarithme additionnel de la contribution transverse est maintenant remplacé par un logarithme dont l'échelle inférieure est liée à la masse magnétique, ce qui est suffisant pour justifier la nature infrarouge de la singularité qui l'engendre.

Les résultats qui précèdent indiquent donc qu'on a potentiellement une singularité infrarouge associée à la contribution du gluon transverse, et que les masses  $m_{\text{mag}}$  et  $M_\infty$  sont en compétition pour jouer le rôle de régulateur. Naturellement, c'est la plus grande de ces deux masses qui est le régulateur le plus pertinent, de sorte que lorsque  $m_{\text{mag}} \ll M_\infty$ ,<sup>23</sup> c'est  $M_\infty$  qui régularise seule cette divergence. On peut vérifier numériquement l'indépendance du résultat vis à vis de la masse magnétique [125] lorsque celle ci est plus petite que toutes les autres échelles du problème. Les résultats sont illustrés sur la figure 9.8.

FIG. 9.8 – Dépendance de la contribution du gluon transverse vis à vis d'une éventuelle masse magnétique. Trait continu :  $(m_g/M_\infty)^2 = 1$ . Trait en pointillé :  $(m_g/M_\infty)^2 = 10$ .



### Mécanisme de régularisation par $M_\infty$

S'il est assez naturel que la masse magnétique puisse régulariser la divergence infrarouge issue d'un gluon transverse,<sup>24</sup> il n'est pas aussi évident que la masse thermique du quark auquel se connecte ce gluon ait le même effet. On peut cependant comprendre assez simplement le mécanisme de régularisation qui est en jeu ici à l'aide de l'argument suivant. On a dans le terme qui nous intéresse le

<sup>23</sup>Ceci est le cas dans la situation perturbative où  $g \ll 1$ , et où la masse magnétique est au plus d'ordre  $g^2 T$ .

<sup>24</sup>Brièvement : la masse magnétique empêche que le propagateur effectif du gluon puisse devenir infini dans la région de genre espace.

produit de fonctions de DIRAC  $\delta(P^2 - M_\infty^2)\delta((R+L)^2 - M_\infty^2)$ , qui dans la limite  $L \rightarrow 0$  devient  $\delta(P^2 - M_\infty^2)\delta(R^2 - M_\infty^2)$ . Or, dans ce dernier produit, les deux distributions ne sont compatibles que dans une région minuscule de l'espace des phases, qui de surcroît ne contient pas le bremsstrahlung (puisqu'il faudrait  $p_o$  et  $r_o$  de signes différents). En d'autres termes, lorsqu'on s'intéresse au processus pour lequel  $p_o$  et  $r_o$  sont de même signe, la masse  $M_\infty$  fait que l'espace des phases accessible à un tel processus est réduit à néant lorsque  $L \rightarrow 0$ . C'est la cinématique assez particulière du processus de bremsstrahlung qui permet à la masse thermique du quark de jouer le rôle de régulateur infrarouge dans le secteur des gluons transverses.<sup>25</sup>

## 9.6 Extension aux photons mous légèrement virtuels

### 9.6.1 Points communs et différences

Tout ce qui précède dans ce chapitre a concerné la production de photons mous réels. Dans cette situation, on a observé un fort accroissement du résultat à cause de divergences colinéaires beaucoup plus fortes que celles qui ont été rencontrées à une boucle. Par un argument de continuité, le même mécanisme doit encore être en oeuvre pour la production de photons de petite masse invariante. Le but de cette section est donc d'étendre les résultats précédents au cas de photons mous légèrement virtuels [125].<sup>26</sup> L'accent sera mis sur les différences avec le cas des photons réels.

On peut tout d'abord vérifier que les domaines autorisés par les contraintes issues de la cinématique restent les mêmes que ceux qui ont été représentés sur la figure 9.1. De plus, la région II reste négligeable puisque sa petitesse est basée sur le fait que  $q_o$  est une énergie molle. Enfin, dans la limite colinéaire, les contraintes cinématiques qui donnaient lieu à ces domaines se résument à  $L^2 < 0$ .

Dans l'élément de matrice, les seules choses qui changent sont les deux dénominateurs. En effet, un calcul élémentaire montre que les équations (9.26) et (9.27) deviennent maintenant

$$R^2 - M_\infty^2 = 2Q \cdot R \approx 2q_o p \left[ 1 - \cos \theta + \frac{M_\infty^2}{2p^2} + \frac{Q^2}{2q_o^2} \right] \quad (9.55)$$

et

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{(P+L)^2 - M_\infty^2} =$$

---

<sup>25</sup>Par conséquent, on ne doit vraisemblablement pas s'attendre à ce que ce mécanisme soit général.

<sup>26</sup>L'expression "légèrement virtuels" deviendra plus quantitative au cours de cette section.

$$\approx \frac{1}{2q_o p} \left[ \left( 1 - \cos \theta + \frac{M_\infty^2}{2p^2} + \frac{Q^2}{2q_o^2} + \frac{L^2}{2p^2} \right)^2 - \frac{L^2}{p^2} \left( \frac{M_\infty^2}{p^2} + \frac{Q^2}{q_o^2} \right) \right]^{-1/2} \quad (9.56)$$

On voit donc que tout se passe dans ces dénominateurs comme si on avait remplacé la masse  $M_\infty^2$  par une masse effective

$$M_{\text{eff}}^2 \equiv M_\infty^2 + \frac{Q^2 p^2}{q_o^2} \quad (9.57)$$

qui est une combinaison de la masse thermique des quarks, et de la masse invariante du photon.<sup>27</sup> En fait, il est assez naturel que  $Q^2$  participe également à la régularisation des divergences colinéaires, puisqu'on sait qu'il n'y a pas de divergence colinéaire pour la production de photons massifs.

### 9.6.2 Discussion qualitative de l'effet de $Q^2$

Anticipant le fait que l'intégrale sur  $p$  va être dominée par la région dure  $p \sim T$ , on peut distinguer les cas suivants :

- $Q^2/q_o^2 \ll g^2$  : dans ce cas, la virtualité du photon émis ne joue aucun rôle, puisqu'on a  $M_{\text{eff}} \approx M_\infty$ . Le résultat que l'on obtient dans ce cas est quantitativement très proche du résultat obtenu dans la section précédente pour les photons réels.

- $g^2 \lesssim Q^2/q_o^2 \ll 1$  : ici, la masse invariante du photon produit doit absolument être prise en compte, car elle a un effet quantitativement important dans la régularisation des divergences colinéaires. On a toujours  $M_{\text{eff}} \ll T$ , de sorte que l'intégrale angulaire reste significativement plus grande que son ordre de grandeur normal qui sera 1. C'est dans cette situation que je qualifie les photons de "légèrement virtuels".

- $Q^2/q_o^2 \sim 1$  : cette fois, c'est la virtualité du photon qui joue le rôle le plus important dans  $M_{\text{eff}}$ , que l'on peut approximer par  $Q^2 p^2 / q_o^2$ . Comme ce régulateur est maintenant dur, on n'aura plus aucun effet d'accroissement dans l'intégrale colinéaire. Je ne considérerai pas ce cas en détail. Toutefois, on peut noter que le point où la virtualité est maximale ( $Q^2/q_o^2 = 1$ ) a en fait été étudié dans le chapitre précédent avec la production de photons statiques.

---

<sup>27</sup>On voit en particulier que lorsque le photon produit est massif, les résultats seraient finis (mais incomplets) même si on n'avait pas pris le soin de garder la masse thermique du quark. Cela corrobore les résultats d'un certain nombre d'études [115, 116, 117, 118, 119, 120] qui ont noté que le taux de production de particules massives était fini dans la théorie nue grâce à des compensations entre corrections réelles et virtuelles (dans le formalisme retardé-avancé que nous utilisons ici, ces compensations sont rendues automatiques car les deux types de corrections sont incorporées de manière compacte dans une formule unique). Dans ces études, le résultat redevient divergent lorsque la masse invariante du photon tend vers zéro, du fait d'un facteur du type de  $\ln(T^2/Q^2)$ . La raison pour laquelle seules des divergences logarithmiques ont été trouvées à deux boucles dans cette étude est liée au fait que la région  $L^2 < 0$  n'apparaît à cet ordre que si on utilise des gluons effectifs. Dans la théorie nue, il aurait fallu aller un ordre plus loin pour rencontrer les divergences que nous avons rencontrées dans ce chapitre.

### 9.6.3 Résultats

En substituant partout  $M_{\text{eff}}$  à  $M_\infty$ , on peut reproduire toutes les transformations effectuées dans la section sur les photons réels pour arriver à un résultat final similaire à (9.35). La seule différence technique réside dans le fait qu'on ne peut plus maintenant découpler l'intégrale sur  $p$  des intégrales sur  $w$  et sur  $x$ . Cela est dû au fait que la masse effective  $M_{\text{eff}}$  dépend de l'impulsion  $p$ . On arrive donc ici au résultat suivant (équivalent à (9.35) lorsque  $Q^2 = 0$ )

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^{\text{RA}}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) &\approx -\frac{2e^2 g^2 N C_F}{\pi^4} \frac{T^3}{q_0} \int_0^{+\infty} dv v^2 \frac{e^v}{(e^v + 1)^2} \\ &\times \int_0^1 \frac{dx}{x} \left| \tilde{I}_{T,L}(x, v) \right| \int_0^{+\infty} dw \frac{\sqrt{w/(w+4)} \tanh^{-1} \sqrt{w/(w+4)}}{(w + \tilde{R}_{T,L}(x, v))^2 + (\tilde{I}_{T,L}(x, v))^2} \end{aligned} \quad (9.58)$$

avec les notations

$$\begin{aligned} v &\equiv \frac{p}{T}, & w &\equiv \frac{-L^2}{M_{\text{eff}}^2(v)} \\ \tilde{I}_{T,L}(x, v) &\equiv \frac{\text{Im } \Pi_{T,L}^{\text{HTL}}(x)}{M_{\text{eff}}^2(v)}, & \tilde{R}_{T,L}(x, v) &\equiv \frac{\text{Re } \Pi_{T,L}^{\text{HTL}}(x)}{M_{\text{eff}}^2(v)}. \end{aligned} \quad (9.59)$$

Puisqu'on a vu dans la section précédente que c'est la masse du quark qui assure en fait la régularisation des divergences infrarouges potentielles, et puisque  $M_{\text{eff}} \geq M_\infty$  remplace ici la masse du quark, on est assuré de la finitude de la formule 9.58 dans le secteur infrarouge. Ici aussi, une masse magnétique d'ordre  $g^2 T$  n'aurait aucun effet sur le résultat.

L'analogie des quantités  $J_{T,L}$  introduites dans la section précédente est donné cette fois par

$$\begin{aligned} J_{T,L} &\equiv \frac{6}{\pi^2} \int_0^{+\infty} dv v^2 \frac{e^v}{(e^v + 1)^2} \int_0^1 \frac{dx}{x} \left| \tilde{I}_{T,L}(x, v) \right| \\ &\times \int_0^{+\infty} dw \frac{\sqrt{w/(w+4)} \tanh^{-1} \sqrt{w/(w+4)}}{(w + \tilde{R}_{T,L}(x, v))^2 + (\tilde{I}_{T,L}(x, v))^2}. \end{aligned} \quad (9.60)$$

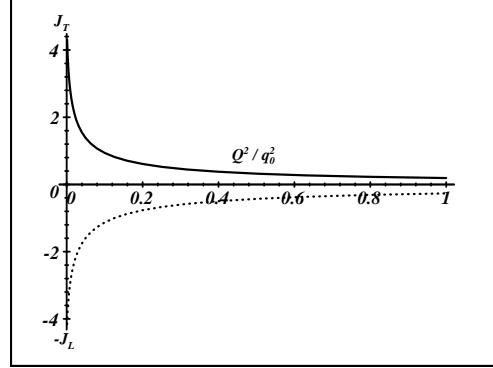
Le préfacteur  $6/\pi^2$  qui figure dans cette expression a été introduit uniquement dans le but de retomber sur les  $J_{T,L}$  de la section précédente lorsque  $Q^2$  tend vers zéro.

On a vu plus haut (voir par exemple les équations (9.48), (9.51) et (9.52)) que lorsque  $Q^2 = 0$ , les fonctions  $J_{T,L}$  sont des fonctions décroissantes de la masse  $M_\infty$ . Dans le cas présent, cela implique que le résultat des intégrations sur  $w$  et  $x$ , à  $v$  fixé, est une fonction décroissante de  $M_{\text{eff}}(v)$ . On sait par ailleurs que  $M_{\text{eff}}(v)$  est une fonction croissante de  $Q^2$ , ce qui entraîne immédiatement



que les  $J_{T,L}$  définis par (9.60) sont des fonctions décroissantes de  $Q^2$ . Ceci est illustré sur la figure 9.9, qui représente le résultat d'un calcul numérique de  $J_{T,L}$  en fonction de  $Q^2/q_o^2$ . On constate que les coefficients  $J_{T,L}$  partent d'une valeur

FIG. 9.9 – Evolution avec  $Q^2/q_o^2$  des quantités  $J_{T,L}$ . Le calcul a été fait avec  $N = 3$  couleurs et  $N_F = 3$  saveurs, et une constante de couplage  $g = 0.44$ .



finie d'ordre 1 lorsque  $Q^2 = 0$ , et décroissent rapidement lorsque  $Q^2$  augmente. Cela est dû au fait que les divergences colinéaires sont de moins en moins fortes si la masse invariante du photon émis augmente.

On peut vérifier que lorsque  $Q^2/q_o^2 \sim 1$ , on a totalement perdu l'accroissement lié aux divergences colinéaires, de sorte que l'on a  $J_{T,L} \sim g^2$ . A cet effet, on peut utiliser les résultats établis dans la section précédente pour la limite  $M_\infty \gg m_g$ , en y substituant  $M_{\text{eff}}$  à  $M_\infty$ . En effet, lorsque  $Q^2/q_o^2$  devient grand devant  $g^2$ , on a bien  $M_{\text{eff}} \gg m_g$ . Cela donne :

$$J_{T,L} \approx \frac{3}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} dv v^2 \frac{e^v}{(e^v + 1)^2} \times \ln \left( \frac{M_{\text{eff}}^2(v)}{m_g^2} \right) \int_0^1 \frac{dx}{x} \left| \tilde{I}_{T,L}(x, v) \right|. \quad (9.61)$$

Si on ne cherche à extraire que le grand logarithme qui domine cette expression, il est suffisant d'approximer  $M_{\text{eff}}(v)$  par  $Q^2 T^2 v^2 / q_o^2$ , et on peut ignorer la dépendance en  $v$  dans le logarithme.<sup>28</sup> Cela permet d'obtenir les résultats suivants :

$$J_T \approx \frac{3}{8\pi} \frac{q_o^2 m_g^2}{Q^2 T^2} \ln \left( \frac{Q^2 T^2}{q_o^2 m_g^2} \right) \\ J_L \approx 2J_T. \quad (9.62)$$

<sup>28</sup>Si on tient à garder cette dépendance, l'intégrale peut être calculée analytiquement au moyen des résultats de l'annexe B. On vérifie alors que le  $v$  à l'intérieur du logarithme ne contribue qu'aux termes constants qui accompagnent le logarithme.

Sur ces dernières formules, on peut noter les propriétés suivantes :

- Le logarithme vient de l'intégrale sur  $w$ , *i.e.* de l'intégrale sur l'impulsion  $l$  du gluon échangé. On voit que le domaine de cette intégrale s'étend depuis les valeurs molles délimitées par la plus petite des deux échelles (ici  $m_g$ ) jusqu'à une échelle intermédiaire qui est celle du régulateur  $M_{\text{eff}}$  des divergences colinéaires. Cette propriété est reliée à ce que nous avons dit lors de la discussion qualitative des divergences colinéaires : il faut que  $L$  soit au plus de l'ordre du régulateur des divergences colinéaires pour que les deux pôles simples se comportent comme un seul pôle double. Au delà de cette valeur, l'accroissement colinéaire devient négligeable, et l'intégrale sur  $l$  est coupée par ce mécanisme.
- On est en présence ici d'une quantité pour laquelle l'échelle d'impulsion la plus pertinente n'est ni l'échelle  $gT$ , ni l'échelle  $T$ , mais une échelle intermédiaire  $M_{\text{eff}}$  qui est fixée par la masse invariante et l'énergie du photon externe.
- Lorsque  $Q^2/q_o^2$  tend vers 1, on retrouve avec les formules (9.62) le résultat obtenu dans le chapitre précédent pour la contribution du bremsstrahlung au taux de production statiques, donnée par l'équation (8.52). Il n'est pas surprenant que le calcul effectué ici en supposant que  $L$  est mou redonne correctement cette expression bien qu'elle vienne à la fois des valeurs molles et dures de  $L$ . En effet, l'obtention correcte des termes logarithmiques est pour une grande part indépendante des approximations qu'on peut faire.

## 9.7 Extension aux photons réels durs

### 9.7.1 Modifications

Une autre extension possible du calcul effectué dans ce chapitre concernant la production de photons mous réels consiste à relâcher l'hypothèse à propos de l'énergie des photons. Je vais dans cette section indiquer ce qui se passe dans le cas où l'on s'intéresse à la production de photons réels durs. Cette extension du calcul initial a été publiée dans [113].

On peut montrer que cette situation relève également de ce chapitre dédié aux divergences colinéaires en remarquant que lorsque le photon est parallèle au quark qui l'émet, il importe peu que le photon soit mou ou dur. Ainsi, toute la discussion sur le phénomène d'accroissement du fait de la superposition de divergences colinéaires s'étend sans peine au cas de photons réels durs. Il suffit pour cela de regarder à nouveau les figures 9.2 et 9.3, pour se convaincre que les seules conditions pour avoir cet accroissement est  $L$  mou, ainsi que  $L^2 < 0$ .

Indiquons maintenant ce qui doit être modifié dans le calcul déjà effectué pour les photons mous. Tout d'abord, on peut noter au niveau de la figure 9.1 que la région II va maintenant devenir importante. En effet, ce qui la rendait sous-dominante jusqu'ici était la petitesse de  $q_o$  devant la température. En outre, le terme de la trace de DIRAC qui contient ces divergences colinéaires se modifie de la façon suivante :

$$-16L^2\overline{P}^\rho\overline{P}^\sigma \rightarrow -8L^2(\overline{P}^\rho\overline{P}^\sigma + \overline{R}^\rho\overline{R}^\sigma) , \quad (9.63)$$

qui par contraction sur les projecteurs transverse et longitudinal va donner maintenant

$$-8L^2(\overline{P}^\rho \overline{P}^\sigma + \overline{R}^\rho \overline{R}^\sigma)P_{\rho\sigma}^T(L) \approx -8 \frac{(p^2 + (p + q_o)^2)}{l^2} (L^2)^2 \quad (9.64\text{-a})$$

$$-8L^2(\overline{P}^\rho \overline{P}^\sigma + \overline{R}^\rho \overline{R}^\sigma)P_{\rho\sigma}^L(L) \approx +8 \frac{(p^2 + (p + q_o)^2)}{l^2} (L^2)^2, \quad (9.64\text{-b})$$

dans l'approximation colinéaire.

En ce qui concerne les angles, la relation (9.10) donnant le cosinus de l'angle  $\theta''$  entre les vecteurs  $\mathbf{q}$  et  $\mathbf{l}$  devient

$$\cos \theta'' = \frac{p}{r}(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \phi) + \frac{q}{r} \cos \theta'. \quad (9.65)$$

### 9.7.2 Contribution du bremsstrahlung

Commençons par la contribution du bremsstrahlung, qui est la plus familière. Elle vient des régions I et III de la figure 9.1. Ici encore, ces deux régions donnent des contributions identiques, de sorte qu'il suffit de calculer celle de la région où  $p_o > 0$  (par exemple) et de multiplier le résultat obtenu par 2. Lorsque  $p_o = +\omega_{\mathbf{p}}$ , on peut vérifier que la formule (9.26) reste inchangée, et que l'équation (9.27) devient quant à elle

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(P+L)^2 - M_\infty^2} \approx \frac{2\pi(p+q_o)}{2q_o p^2} \left[ \left( 1 - \cos \theta + \frac{M_\infty^2}{2p^2} + \frac{L^2}{2p^2} \right)^2 - \frac{L^2}{p^2} \frac{M_\infty^2}{p^2} \right]^{-1/2} \quad (9.66)$$

La différence avec le cas des photons mous vient donc seulement d'un facteur  $(1 + q_o/p)$  supplémentaire.

Par les mêmes transformations que celles qui ont été utilisées dans la section 9.5, on obtient le résultat suivant, qui est une généralisation de (9.42) pour la production de photons durs

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(Q) &\approx -\frac{e^2 g^2 N C_F}{\pi^4} (J_T + J_L) \frac{T}{q_o^2} \\ &\times \int_0^{+\infty} dp (p^2 + (p + q_o)^2) [n_F(p) - n_F(p + q_o)], \end{aligned} \quad (9.67)$$

où les fonctions  $J_{T,L}$  sont les mêmes que celles qui ont été définies par l'équation (9.41). On voit donc que la seule chose qui change lorsque le photon produit devient dur réside dans l'intégrale sur la variable  $p$ , dans laquelle on ne peut plus négliger  $q_o$ . Cela entraîne le remplacement de (9.32) par l'intégrale qui apparaît sur la deuxième ligne de l'équation précédente.

Cette intégrale peut cependant être calculée analytiquement, et être exprimée en termes de poly-logarithmes sous la forme suivante

$$\int_0^\infty dp (p^2 + (p + q_o)^2) [n_F(p) - n_F(p + q_o)]$$

$$\begin{aligned}
&= T^3 \left[ 3\zeta(3) + \frac{\pi^2}{6} \frac{q_o}{T} + \left( \frac{q_o}{T} \right)^2 \ln(2) \right. \\
&\quad + 4 \operatorname{Li}_3(-e^{-|q_o|/T}) + 2 \frac{q_o}{T} \operatorname{Li}_2(-e^{-|q_o|/T}) \\
&\quad \left. - \left( \frac{q_o}{T} \right)^2 \ln(1 + e^{-|q_o|/T}) \right] . \tag{9.68}
\end{aligned}$$

Il convient ici de rappeler que les poly-logarithmes sont les fonctions définies par des séries entières :

$$\operatorname{Li}_a(z) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^a} . \tag{9.69}$$

Si on note que  $\operatorname{Li}_a(-1) = (2^{1-a} - 1)\zeta(a)$  et  $\operatorname{Li}_a(0) = 0$ , on peut donner des formes asymptotiques de (9.68) dans deux limites. On peut tout d'abord retrouver le résultat donné dans la section 9.5 pour la production de photons réels mous. Cela signifie que les équations (9.67) et (9.68) fournissent une généralisation de la relation (9.42) qui est valable pour la production de photons réels de toutes énergies.

Ensuite, on peut donner une forme simplifiée pour la production de photons réels dont l'énergie est très grande devant la température :

$$\int_0^{+\infty} dp (p^2 + (p + q_o)^2) [n_F(p) - n_F(p + q_o)] \underset{q_o \gg T}{\approx} q_o^2 T \ln(2) , \tag{9.70}$$

qui entraîne la forme approchée suivante pour la contribution de bremsstrahlung :

$$\operatorname{Im} \Pi^{\mu\mu}_{RA}(q_o, \mathbf{q}) \approx - \frac{e^2 g^2 \ln(2) N C_F}{\pi^4} T^2 (J_T + J_L) . \tag{9.71}$$

### 9.7.3 Contribution de la région II

Comme annoncé, je vais maintenant montrer que le processus associé à la région II de la figure 9.1 contribue de façon importante à la production de photons durs réels. Notons d'abord que cette région se trouve incluse dans le secteur où  $p_o = -\omega_{\mathbf{p}}$ . Il est très facile de vérifier que lorsque  $p_o = -\omega_{\mathbf{p}}$  et  $q_o$  est dur, la relation (9.26) devient

$$R^2 - M_\infty^2 \approx -2pq_o \left[ 1 + \cos \theta + \frac{M_\infty^2}{2p^2} \right] . \tag{9.72}$$

Il est assez compliqué de donner dans le cas général la contribution de la portion II. Il existe toutefois un cas limite où ce calcul se simplifie, et qui se trouve correspondre à la limite où cette contribution devient dominante. Supposons donc dès le départ que  $q_o \gg T$ . Si on regarde les poids statistiques des quarks :  $n_F(p_o) - n_F(p_o + q_o)$ , on constate qu'on peut les approximer par une fonction

qui serait égale à 1 lorsque  $-q_o \leq p_o \leq 0$ , et à zéro pour toute autre valeur de  $p_o$ .<sup>29</sup> Par conséquent, on peut limiter l'intégration sur  $p$  à l'intervalle  $0 \leq p \leq q_o$ .

On peut alors vérifier que la relation (9.27) se transforme en

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(P+L)^2 - M_\infty^2} \approx \frac{2\pi(q_o - p)}{2q_o p^2} \left[ \left( 1 + \cos \theta + \frac{M_\infty^2}{2p^2} + \frac{L^2}{2p^2} \right)^2 - \frac{L^2}{p^2} \frac{M_\infty^2}{p^2} \right]^{-1/2} \quad (9.73)$$

et on sait maintenant que  $q_o - p$  est positif. On va encore avoir le phénomène d'accroissement dû aux divergences colinéaires, lorsque  $\cos \theta \approx -1$ . On peut vérifier que si on introduit cette fois la variable  $u \equiv 1 + \cos \theta$ , le résultat de l'intégration sur  $\theta$  est le même que dans le cas du bremsstrahlung.

Le fait que la divergence colinéaire ait lieu pour  $\cos \theta = -1$  induit quelques changements sur l'expression des traces de DIRAC contractées avec les projecteurs, dans l'approximation colinéaire, qui deviennent

$$-8L^2(\overline{P}^\rho \overline{P}^\sigma + \overline{R}^\rho \overline{R}^\sigma)P_{\rho\sigma}^T(L) \approx -8 \frac{(p^2 + (q_o - p)^2)}{l^2} (L^2)^2 \quad (9.74\text{-a})$$

$$-8L^2(\overline{P}^\rho \overline{P}^\sigma + \overline{R}^\rho \overline{R}^\sigma)P_{\rho\sigma}^L(L) \approx +8 \frac{(p^2 + (q_o - p)^2)}{l^2} (L^2)^2. \quad (9.74\text{-b})$$

On peut également utiliser l'approximation colinéaire pour obtenir une expression plus simple des frontières du domaine II. Il est aisé de vérifier que les contraintes sur  $L$  pour cette région peuvent se résumer à  $L^2 < 0$ . Cela signifie que le résultat de l'intégration sur  $l_o$  et  $l$  va encore engendrer le facteur  $J_T + J_L$  que nous avons déjà rencontré. Encore une fois, la seule chose qui diffère notablement vient de l'intégration sur l'impulsion  $p$  :

$$\int_0^{q_o} dp (p^2 + (q_o - p)^2) = \frac{2q_o^3}{3}. \quad (9.75)$$

Rassemblant ce qui précède, on arrive sans peine à la contribution de la région II au taux de production de photons ultra-durs

$$\text{Im } \Pi^{RA}{}_\mu{}^\mu(q_o, \mathbf{q}) \approx -\frac{e^2 g^2 N C_F}{3\pi^4} q_o T (J_T + J_L). \quad (9.76)$$

On constate en particulier que ce processus devient dominant devant le bremsstrahlung lorsque  $q_o \gg T$ , à cause de sa dépendance vis à vis de l'énergie du photon.

#### 9.7.4 Comparaison avec les résultats existants

BAIER, NAKKAGAWA, NIEGAWA et REDLICH dans l'article [109], ainsi que KAPUSTA, LICHART et SEIBERT dans [126], ont considéré la contribution des

<sup>29</sup>La transition entre 0 et 1 se produit sur un domaine de largeur  $T \ll q_o$ . Ces effets de bord induisent des corrections d'ordre relatif  $T/q_o \ll 1$ , qui sont donc négligeables.

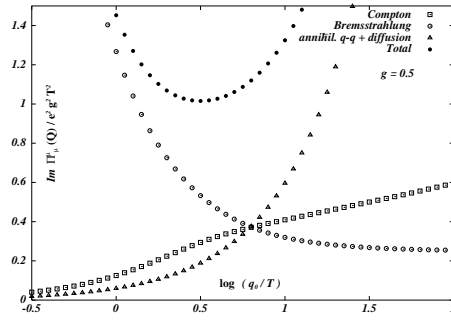
processus  $qg \rightarrow q\gamma$  et  $q\bar{q} \rightarrow g\gamma$  au taux de production de photons réels durs. Le résultat qu'il ont obtenu peut se mettre sous la forme

$$\text{Im } \Pi^{\text{RA}}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) \approx -\frac{e^2 g^2 N C_F}{16\pi} T^2 \ln \left( \frac{cq_o}{\alpha_s T} \right), \quad (9.77)$$

pour  $q_o \gg T$ , où  $c$  est une constante purement numérique approximativement égale à 0.23.

Afin de comparer ce résultat avec ceux qui ont été obtenus dans cette section, je vais fixer le nombre de couleurs à  $N = 3$ , et le nombre de saveurs à  $N_F = 2$ . La constante de couplage est quant à elle fixée à la valeur  $g = 0.5$ .<sup>30</sup> On a alors numériquement  $J_T \approx 4.45$  et  $J_L \approx 4.26$ . On peut tracer les trois contributions sur le même graphique afin de les comparer, ce qui a été fait sur la figure 9.10. On constate sur cette figure que le bremsstrahlung est dominant pour

FIG. 9.10 – Comparaison des diverses contributions à la production de photons réels durs.



$q_o \lesssim T$ , alors que la contribution de la région II devient dominante pour la production de photons d'énergie plus grande que la température. On constate également que la contribution Compton n'est jamais dominante pour les valeurs des paramètres que j'ai choisis pour faire cette comparaison. On voit également que la somme des trois types de contributions est significativement au dessus de la seule contribution de l'effet Compton, ce qui peut avoir des incidences phénoménologiques notoires.

## 9.8 Connexion avec les divergences des boucles dures

D'un point de vue théorique, le résultat majeur de ce chapitre réside dans la possibilité que des divergences colinéaires très fortes modifient la hiérarchie

<sup>30</sup>Formellement, dans la limite où la constante de couplage  $g$  tend vers zéro, la contribution (9.77) obtenue par BAIER, NAKKAGAWA, NIEGAWA et REDLICH domine les nouvelles contributions obtenues ici à deux boucles par un facteur  $\ln(1/g)$  qui devient grand.

habituelle du développement perturbatif en engendrant des puissances de  $1/g$ . Toutefois, d'un point de vue strictement technique, il n'est pas évident que les divergences que nous avons rencontrées ici aient quelque chose à voir avec les divergences colinéaires qui apparaissent dans les boucles dures lorsque certaines de leurs lignes externes sont sur le cône de lumière.

Afin de rendre plus explicite la connexion entre les diagrammes que nous avons étudié dans ce chapitre et les divergences contenues dans les boucles dures, on peut commencer par remarquer l'identité suivante :

The diagrammatic identity (9.78) shows two diagrams on the left separated by a plus sign, followed by an equals sign and the word 'topologie' in italics, and then a single diagram on the right. The first diagram on the left is a tadpole with a gluon loop (represented by a circle with a vertical line through it) and two external wavy lines. The second diagram on the left is a tadpole with a gluon loop (represented by a circle with a horizontal line through it) and two external wavy lines. The diagram on the right is a tadpole with a gluon loop (represented by a circle with a vertical line through it) and two external wavy lines. The entire equation is labeled (9.78) on the right.

On ne doit cependant donner trop de sens à cette relation diagrammatique. Elle indique seulement que les diagrammes que nous avons considéré peuvent être considérés comme une “vue de détail” du diagramme de type “tadpole” qui est obtenu avec un vertex effectif  $\gamma\gamma gg$ . Elle n'est valide que d'un point de vue topologique, parce que les deux membres ne donnent pas exactement les mêmes expressions. En fait, on sait que le membre de droite est strictement nul lorsqu'on forme la trace sur les indices de LORENTZ du photon externe. Cette propriété est une conséquence de l'approximation de boucle dure.

Ces approximations mises à part, les deux membres ont les mêmes dénominateurs, et par conséquent les mêmes singularités. En effet, le vertex effectif  $\gamma\gamma gg$  exhibe une divergence colinéaire logarithmique si une de ses lignes externes est sur le cône de lumière, et un double pôle<sup>31</sup> lorsque deux de ses lignes externes sont sur le cône de lumière, et colinéaires entre elles. Lorsqu'on referme le gluon qui sort de ce vertex sur lui même, on satisfait automatiquement cette condition de colinéarité puisque les deux photons ont maintenant la même impulsion. Néanmoins, dans le cas du membre de droite, ces singularités ne sont pas visibles car l'approximation de boucle dure faite au numérateur leur affecte un préfacteur nul. On voit donc qu'on aurait aussi bien pu nous contenter de calculer le tadpole “au delà de l'approximation des boucles dures” (*i.e.* en gardant au numérateur des termes que l'approximation de boucle nous aurait normalement amenés à laisser tomber). C'est en fait le point de vue qui avait été adopté dans les articles initiaux [124, 125] où ce travail a été présenté.

Ici aussi, on peut voir le fait qu'il faille aller chercher à l'ordre suivant ces termes singuliers comme une déficience de l'approximation de boucle dure. En effet, une fois ces divergences colinéaires régularisées, elles se manifestent par un facteur  $1/g^2$  qui vient de ce que leur régulateur naturel se trouve à l'échelle  $gT$  sous la forme d'une masse thermique. En l'absence de divergence colinéaire, ce facteur résultant de l'intégration angulaire serait d'ordre 1. En fait, l'approximation de boucle dure suppose dès le départ que les intégrales angulaires donnent un résultat qui est d'ordre 1, et en déduit ensuite une liste de fonctions

<sup>31</sup>Ne pas faire l'approximation de boucle dure au niveau des dénominateurs peut conduire à deux pôles simples très voisins plutôt qu'à un pôle double.

à une boucle qui ont le même ordre de grandeur que leur analogue à l'ordre des arbres. A cause de l'accroissement colinéaire rencontré ici, des termes qui seraient sous-dominants dans une situation normale (et que l'approximation de boucle dure ignore légitimement) deviennent dominants lorsque certaines lignes externes sont sur le cône de lumière. On peut donc conclure ce chapitre en disant que l'approximation de boucle dure semble inadaptée pour extraire les termes pertinents dans les fonctions dont certaines lignes externes sont de masse nulle, ce qui impose alors de calculer des diagrammes d'ordre plus élevé pour les obtenir.



## Chapitre 10

# Explorations

- Voire ... répondit Mangemanche. Nous n’y sommes point encore. Et les embûches peuvent se multiplier.
- Se multiplier par quoi ? dit l’interne.
- Par rien, dit Mangemanche.
- Alors il n’y en aura pas, dit l’interne, parce que quelque chose qu’on multiplie par rien, ça fait toujours rien.

Boris Vian  
*L’automne à Pekin*

Cette fois c’est promis, ce chapitre est le dernier. Les deux chapitres précédents nous ont permis de constater sur l’exemple de la production de photons deux déficiences importantes de la théorie effective basée sur la sommation des boucles dures. Dans les deux cas, il est apparu que cette théorie effective n’est pas en mesure de regrouper dans les diagrammes d’ordre le plus bas toutes les contributions dominantes. Au contraire de cela, des contributions essentielles ont été trouvées à deux boucles. La question évidente qui se pose alors est : y-a-t’il de bonnes raisons pour que cela s’arrête à deux boucles ? A cette question, la réponse la plus vraisemblable est négative.

En d’autres termes, d’autres corrections<sup>1</sup> importantes vont probablement être contenues dans les diagrammes d’ordre supérieur à deux boucles. Une possibilité est donc de calculer les diagrammes à trois boucles, puis quatre boucles, etc... Toutefois, leur nombre et leur complexité augmentent considérablement, ce qui rend cette approche difficilement praticable. Il semble donc préférable d’essayer de trouver d’abord un principe organisateur qui permette de se faire

---

<sup>1</sup>Parler de “corrections” est peut-être déjà trop optimiste...

une idée à priori des topologies dans lesquelles on a des chances de trouver ces contributions importantes. Pour la production de photons virtuels, il semble que l'on ait déjà une idée assez précise de la nature des diagrammes d'ordre supérieur qu'il faudrait regarder de sorte qu'il ne reste qu'à faire le calcul.

La situation est par contre beaucoup plus confuse pour la production de photons réels. Il semblait donc assez naturel de regarder d'autres approches afin de s'en inspirer éventuellement en théorie des champs à température finie. L'organisation de ce chapitre va être la suivante : je commence par une section où j'expose très brièvement les résultats obtenus à l'aide des méthodes semi-classiques pour la perte d'énergie d'une particule chargée rapide dans un plasma, et en particulier l'effet LANDAU-POMERANCHUK-MIGDAL dû aux diffusions multiples.

En supposant que cet effet apparaît également pour la production de photons par un plasma, cela permet de savoir dans quelles topologies on doit le rechercher. Dans la section suivante, j'expose quelques résultats partiels obtenus pour quelques topologies à trois boucles. Il ne s'agit pas d'un calcul complet mais plutôt de considérations préliminaires qui demandent à être complétées.

Une autre piste possible pour regrouper une série infinie de diagrammes susceptibles d'être importants consiste à donner une largeur aux quasi-particules. Dans cette section, je considérerai cette largeur du point de vue des divergences colinéaires et montrerai qu'elle peut jouer le rôle de régulateur aussi bien qu'une masse thermique. Toutefois, l'inclusion d'une largeur dans le propagateur des quasi-particules n'est pas sans poser des problèmes avec l'invariance de jauge. LEBEDEV et SMILGA ont les premiers proposé une méthode permettant d'inclure les corrections au vertex nécessaires pour rétablir l'invariance de jauge. Je consacrerai la dernière section à une tentative pour appliquer leur méthode au calcul de la partie imaginaire du tenseur de polarisation du photon. Il apparaît que les approximations qu'ils proposent sont trop drastiques pour calculer cette quantité.

## 10.1 Diffusions multiples et effet LPM

### 10.1.1 Introduction

Différents groupes [127, 96, 97, 128, 95, 129, 130] se sont récemment intéressés à l'étude de la perte d'énergie radiative par une particule chargée rapide traversant un plasma. L'intérêt pour cette quantité remonte en fait à un résultat obtenu dans les années soixante par LANDAU et POMERANCHUK [131] d'une part et par MIGDAL [132] d'autre part. En effet, le résultat qu'ils ont obtenu pour le spectre des photons émis par cette particule rapide indique que le nombre de photons émis va être très réduit dans la région des photons de basse énergie. Plus précisément, ils ont prouvé que les diffusions multiples de cette particule rapide pouvaient induire une suppression de l'émission de photons de faible énergie, comparé à ce qui était prédit pour l'émission induite par une diffusion unique.

Ces prédictions ont été confirmées expérimentalement [133, 134] assez récem-

ment dans le cas de l'électrodynamique quantique, par l'étude des photons émis par des électrons traversant un milieu dense. Outre cette confirmation expérimentale, l'intérêt nouveau pour l'effet LPM est en relation avec les expériences de collisions de noyaux lourds. L'idée sous-jacente est la suivante : dans la phase initiale d'une telle collision, des partons très énergétiques peuvent être produits au cours de processus très durs. Ensuite, ces partons (qui donneront finalement un jet) doivent traverser un milieu dense, qui peut être un plasma de quarks et de gluons, avant de s'échapper pour atteindre les détecteurs. Les travaux récents ont donc repris l'étude de l'effet LPM dans le cadre de QCD. Il s'agissait d'étudier la perte d'énergie d'un parton rapide dans un plasma de quarks et de gluons, afin de voir si le fait qu'il ait à traverser un milieu dense et chaud induisait une différence observable sur le spectre des jets produits.

### 10.1.2 Le modèle et ses hypothèses

Afin de mener à bien ce calcul, on considère usuellement une particule chargée (un électron dans le cas d'un plasma QED) dont l'énergie est très supérieure à l'énergie moyenne des particules du milieu dense qu'elle traverse (*i.e.* très supérieure à la température). Ensuite on suppose que cette particule suit une trajectoire quasi rectiligne, et subit de temps en temps une diffusion sur l'un des partons qui constituent le plasma. La fréquence moyenne de ces diffusions est déterminée par le libre parcours moyen de la particule rapide.

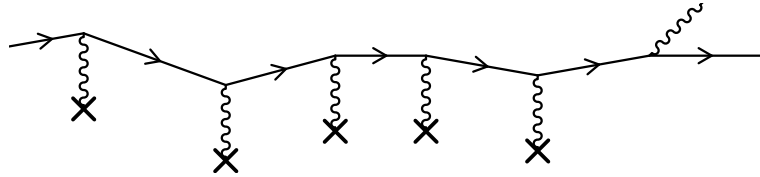


FIG. 10.1 – Emission d'un photon induite par des diffusions multiples.

Par ailleurs, une hypothèse simplificatrice très importante est introduite ici : les partons sur lesquels cette particule diffuse sont assimilés à des centres diffuseurs statiques. Cela implique que l'interaction entre le centre diffuseur et la particule en mouvement est purement coulombienne. On suppose en outre que cette interaction est écrantée par une masse de DEBYE  $m_D$ , de sorte qu'on n'a aucun problème de nature infrarouge avec ces interactions. Les paramètres qui entrent dans ce calcul sont donc la masse de DEBYE  $m_D$  et le libre parcours moyen  $\lambda$  de la particule dans le milieu.

On suppose par ailleurs que les collisions successives sont indépendantes. Cette condition est réalisée lorsque le libre parcours moyen entre deux collisions est très grand devant la portée des interactions. Cette dernière est proportion-

nelle à l'inverse de la masse de DEBYE.

Enfin, les autres hypothèses sont plus de nature cinématique. En particulier on considère usuellement la “limite d'impulsion infinie” pour la particule qui traverse le plasma, et on suppose également que l'énergie du photon produit est très petite devant celle de la particule rapide. Cette hypothèse additionnelle entraîne quelques simplifications au niveau du calcul des amplitudes.

### 10.1.3 Résultats pour QED

Le résultat prédit par LANDAU, POMERANCHUK et MIGDAL est une modification notable de la forme du spectre des photons émis dans la région des photons de faible énergie. Plus précisément, le calcul basé sur la considération d'une seule diffusion prédit un spectre qui se comporte en  $1/q_o$ , où  $q_o$  est l'énergie des photons produits ; alors que l'effet LPM a pour conséquence un spectre dont la dépendance vis à vis de l'énergie du photon est en  $1/\sqrt{q_o}$ .

Sans rentrer dans les détails techniques [135], cet effet est une conséquence des diffusions multiples que subit la particule qui traverse le plasma. Dans les calculs apparaît une “longueur de cohérence”  $\lambda_{co}$  telle que toutes les diffusions qui ont lieu sur une distance de l'ordre de cette longueur peuvent être considérées comme une diffusion unique sur un centre diffuseur ayant une charge effective différente de la somme des charges des centres diffuseurs réels. Ceci est illustré sur la figure 10.2.

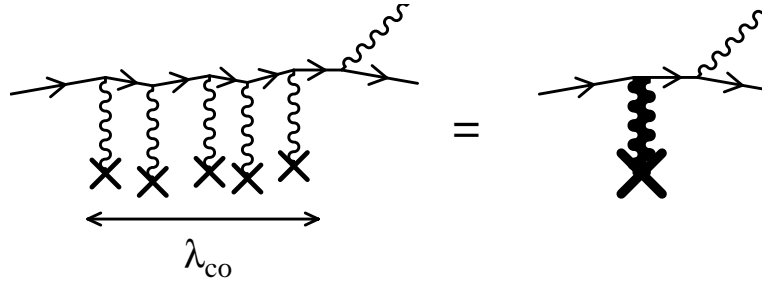


FIG. 10.2 – Longueur de cohérence des diffusions multiples.

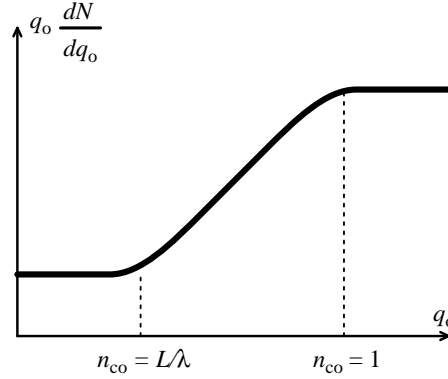
De façon plus détaillée, on peut prouver que le nombre de diffusions successives cohérentes est approximativement égal à

$$n_{co} \approx \sqrt{\frac{2E^2}{\lambda m_D^2 q_o}}, \quad (10.1)$$

où  $E$  est l'énergie de la particule incidente. La longueur de cohérence introduite plus haut est simplement égale à  $\lambda_{co} = \lambda n_{co}$ . Cette longueur de cohérence est

donc une fonction décroissante de l'énergie des photons, de sorte qu'à très basse énergie on peut devenir sensible à des effets dus à la taille finie de l'échantillon de plasma. En d'autres termes, la suppression du spectre de photons (relativement au résultat prédit par une seule diffusion) cesse en dessous d'une certaine énergie qui est caractéristique de la taille  $L$  de l'échantillon. L'allure du spectre que l'on va obtenir ainsi est illustrée sur la figure 10.3. Cet effet de taille finie a également

FIG. 10.3 – Allure du spectre d'émission dû à l'effet LPM en QED. Les échelles sont logarithmiques.



été observé expérimentalement dans le cas des interactions électromagnétiques.

#### 10.1.4 Discussion

Les résultats obtenus à l'aide de ces méthodes semi-classiques pour la perte d'énergie radiative par une particule ont ensuite été appliqués au calcul du taux de production de photons par un plasma [128, 95]. En effet, il suffit a priori d'intégrer sur l'énergie  $E$  de la particule incidente en pondérant cette intégration par le poids statistique traduisant la probabilité de trouver une telle particule dans un plasma.

Cette étape ultérieure n'est pas forcément justifiée. En effet, l'énergie moyenne des particules issues du plasma est de l'ordre de la température  $T$ , de sorte que l'on sort de l'hypothèse de départ qui était la "limite d'impulsion infinie". La conséquence la plus évidente que cela peut avoir concerne l'approximation qui consiste à supposer les centres diffuseurs statiques. Naïvement, on peut dire que cela était une bonne approximation lorsqu'une particule très rapide ( $E \gg T$ ) traverse un milieu dense où la vitesse moyenne des partons est fixée par la température du milieu. Par contre, si la particule issue du plasma (*i.e.* dont l'énergie typique est  $T$ ) est diffusée sur une autre particule dont l'énergie typique est également  $T$ , il n'y a a priori aucune raison pour considérer ce centre diffuseur comme statique. En fait, l'étude présentée dans les deux chapitres précédents pour le bremsstrahlung au sein d'un plasma indiquent que les collisions par échange d'un gluon transverse sont quantitativement aussi importantes que les

collisions par échange d'un gluon longitudinal. Cela invalide donc l'hypothèse des centres diffuseurs statiques dans ce contexte.

A cause de cette différence, il semble intéressant d'essayer d'étudier l'effet des diffusions multiples sur la production de photons par un plasma en théorie des champs à température finie, afin de voir si l'effet LPM joue vraiment un rôle dans ce contexte. En particulier, il serait intéressant de déterminer si les gluons transverses ne changent le résultat que de manière quantitative,<sup>2</sup> ou bien si au contraire ils vont induire des modifications plus drastiques par rapport aux prédictions obtenues en les négligeant. Des problèmes infrarouges risquent en effet de survenir dans les ordres supérieurs à cause des gluons transverses.

## 10.2 Résultats partiels à trois boucles

### 10.2.1 Diagrammes

Si l'on envisage la contribution à la production de photons des diagrammes à trois boucles en ayant à l'esprit l'effet LPM, on doit s'orienter vers les topologies qui correspondent aux diffusions multiples d'un quark. Cela implique que l'on va s'intéresser uniquement aux diagrammes ayant une seule boucle de quarks à laquelle sont connectés les deux photons. Il s'agit des topologies du type de celle qui est représentée sur la figure 9.4. On voit en effet qu'en coupant un tel diagramme, on va engendrer des processus qui correspondent à l'émission d'un photon induite par des diffusions multiples,<sup>3</sup> ainsi que des corrections virtuelles à des processus du même type.

Dans la limite où les gluons échangés sont mous, on a donné dans la section 9.4 une formule relativement compacte (dont la complexité ne croît pas avec le nombre de boucles du diagramme) pour la trace des matrices de DIRAC qui apparaissent dans la boucle du quark.

Dans cette section, je vais présenter des résultats préliminaires concernant deux aspects du calcul à trois boucles. Il s'agit d'une part de l'effet des corrections d'ordre supérieur à la masse  $M_\infty$  des quarks circulant dans la boucle, et d'autre part de compensations dans le secteur des gluons mous.

### 10.2.2 Effets d'une correction à la masse $M_\infty$

#### Diagrammes

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le taux de production de photons réels est très sensible à la masse asymptotique  $M_\infty$  des quarks qui émettent le photon, à cause de divergences colinéaires très sévères. Si on calcule cette masse à l'ordre des boucles dures, on la trouve d'ordre  $M_\infty^2 \sim g^2 T^2$ . Le

---

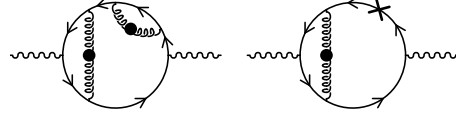
<sup>2</sup>Dans le cas d'une diffusion unique, qui est la seule situation étudiée jusqu'à présent en théorie des champs à température finie, la différence est uniquement quantitative. Les aspects qualitatifs du résultat sont par contre identiques dans les deux approches.

<sup>3</sup>A condition bien sûr d'utiliser des propagateurs effectifs pour les gluons échangés.

but de ce paragraphe est de faire quelques remarques concernant l'effet des corrections  $\delta M_\infty^2$  à cette masse.

Dans le développement perturbatif, ces corrections apparaissent dans la topologie qui contient une correction de self-énergie sur un des quarks des diagrammes considérés à deux boucles, représentée sur la figure 10.4. Comme d'ha-

FIG. 10.4 – Topologie à trois boucles fournissant une correction à la masse  $M_\infty$ .



bitude, il faut inclure le contre-terme qui soustrait de cette correction de self-énergie la contribution que l'on a déjà grâce à la masse asymptotique  $M_\infty$  déjà contenue dans les propagateurs des quarks,<sup>4</sup> afin d'éviter les double comptages. La différence entre cette correction de self-énergie et le contre-terme correspondant va donc fournir une correction à la masse  $M_\infty^2$ , dont l'ordre de grandeur est au plus  $\delta M_\infty^2 \sim g^3 T^2$ . De plus, cette correction à la masse thermique du quark dépend vraisemblablement de l'impulsion du quark, et possède une partie imaginaire y compris lorsque le quark est de genre temps (c'est en effet via ce diagramme que le taux d'amortissement du quark apparaît dans le développement perturbatif).

### Argument basé sur le calcul à deux boucles

Concernant la correction à la masse (partie réelle de la correction de self-énergie), le calcul effectué dans le chapitre précédent permet de se faire une idée a priori de ses effets. En effet, lors du calcul du taux de production de photons réels (mous ou durs), on a obtenu un résultat proportionnel à  $J_{T,L}$ , où les quantités  $J_{T,L}$  sont des coefficient numériques qui ne dépendent que du rapport de masses thermiques  $M_\infty^2/m_g^2$ . De plus, ces fonctions sont des fonctions régulières de leur argument, de sorte que si l'on corrige la masse par une petite quantité  $\delta M_\infty^2$ , on doit s'attendre à obtenir

$$\begin{aligned} J_{T,L} \left( \frac{M_\infty^2 + \delta M_\infty^2}{m_g^2} \right) &\approx J_{T,L} \left( \frac{M_\infty^2}{m_g^2} \right) + \frac{\delta M_\infty^2}{m_g^2} J'_{T,L} \left( \frac{M_\infty^2}{m_g^2} \right) \\ &\approx J_{T,L} \left( \frac{M_\infty^2}{m_g^2} \right) (1 + \mathcal{O}(g)) . \end{aligned} \quad (10.3)$$

<sup>4</sup>Par conséquent, la croix sur le deuxième diagramme de la figure 10.4 ne désigne pas la totalité du contre-terme de boucle dure, mais uniquement la partie de celui-ci qui soustrait la masse asymptotique. Plus précisément, on peut vérifier que son expression est :

$$\frac{M_\infty^2}{2p} \hat{\mathbf{p}} , \quad (10.2)$$

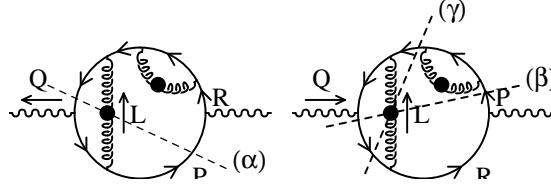
où l'on note  $\hat{P} \equiv (1, \hat{\mathbf{p}})$ .

Par conséquent, on s'attend à ce que cette correction à la masse ne contribue que de façon sous-dominante. Le but de ce paragraphe est de vérifier cette conjecture dans le contexte perturbatif des diagrammes de la figure 10.4.

### Estimation naïve des contributions à trois boucles

Par ailleurs, parmi toutes les coupures possibles à travers le premier des deux diagrammes de la figure 10.5, seules les trois représentées sont des corrections à la contribution étudiée à deux boucles et impliquent la partie réelle de la correction de self-énergie. Si on admet que cette correction à la partie réelle de la self-énergie est d'ordre  $g^3 T$  une fois que le contre-terme a été retranché, on peut facilement vérifier que chaque coupure *considérée individuellement* fournit une contribution du même ordre de grandeur que le résultat à deux boucles,<sup>5</sup> ce qui semble invalider la conjecture précédente. Dans la suite de ce paragraphe, je vais en fait montrer que des compensations surviennent lorsqu'on additionne ces trois coupures, de sorte que leur somme donne bien une contribution supprimée par au moins une puissance de  $g$ .

FIG. 10.5 – Coupures contribuant à la correction à la masse  $M_\infty$  dans l'approche perturbative.



### Compensations entre les trois coupures

Dans le calcul de ces trois coupures, j'ai choisi les notations pour les impulsions internes de telle sorte que les deux quarks coupés portent toujours les impulsions  $P$  et  $R + L$  (voir la figure 10.5). En effet, cela permettra de mettre en facteur les fonctions  $\delta(\cdot)$  qui contrôlent la cinématique. Pour les trois coupures, si on suppose les gluons mous et si on se place en outre dans la configuration colinéaire, la formule (9.21) permet d'obtenir la valeur suivante pour la trace des matrices de DIRAC :

$$64P^\alpha P^\beta P^\rho P^\sigma L^2, \quad (10.4)$$

où  $L$  est l'impulsion du gluon coupé, et  $\alpha, \beta, \rho, \sigma$  les indices de LORENTZ attachés aux deux gluons.

<sup>5</sup>La raison de cela réside dans le fait que l'on a maintenant trois dénominateurs devenant très petits dans la configuration colinéaire. L'accroissement dû à ces singularités est donc encore plus fort qu'à deux boucles.



Avec cette trace, on peut écrire la contribution de la coupure ( $\alpha$ ) (incluant le contre-terme) à la partie imaginaire du tenseur de polarisation du photon :

$$\begin{aligned}
\text{Im } \Pi^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) \Big|_{(\alpha)} &\approx -\frac{e^2 g^2 N C_F^2}{2} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} [\Delta_{T,L}^R(L) - \Delta_{T,L}^A(L)] \\
&\times [\Delta^R(P) - \Delta^A(P)] [\Delta^R(R+L) - \Delta^A(R+L)] \\
&\times (n_F(r_o) - n_F(p_o))(n_B(l_o) + n_F(r_o + l_o)) \\
&\times \Delta(P+L) \Delta^2(R) [2P^\beta (-i\Sigma_{\alpha\beta}^{AR}(R)) - \hat{R}_\alpha \frac{M_\infty^2}{2r}] \\
&\times P_{\rho\sigma}^{T,L}(L) [-32P^\rho P^\sigma P^\alpha L^2], \tag{10.5}
\end{aligned}$$

où je note

$$\begin{aligned}
-i\Sigma_{\alpha\beta}^{AR}(R) &= -g^2 \int \frac{d^4 L_1}{(2\pi)^4} P_{\alpha\beta}^{T,L}(L_1) \\
&\times \left\{ n_F(r_o + l_1^o) [\Delta^R(R+L_1) - \Delta^A(R+L_1)] \Delta^R(L_1) \right. \\
&\quad \left. - n_B(l_1^o) [\Delta^R(L_1) - \Delta^A(L_1)] \Delta^A(R+L_1) \right\} \tag{10.6}
\end{aligned}$$

la self-énergie corrigeant le propagateur du quark. La combinaison dans le crochet contenant  $\Sigma_{\alpha\beta}^{AR}$  est ce qui reste de la correction à la masse lorsqu'on soustrait le contre-terme.<sup>6</sup> L'ordre de grandeur de ce crochet est donc  $g^3 T$ . Afin de simplifier les notations ultérieures, je noterai son contenu sous la forme  $-2iP^\beta \delta\Sigma_{\alpha\beta}^{AR}(R)$ .

Pour ce qui est de la coupure ( $\beta$ ), on a la contribution

$$\begin{aligned}
\text{Im } \Pi^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) \Big|_{(\beta)} &\approx -\frac{e^2 g^2 N C_F^2}{2} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} [\Delta_{T,L}^R(L) - \Delta_{T,L}^A(L)] \\
&\times [\Delta^R(P) - \Delta^A(P)] [\Delta^R(R+L) - \Delta^A(R+L)] \\
&\times (n_F(r_o) - n_F(p_o))(n_B(l_o) + n_F(r_o + l_o)) \\
&\times \Delta(P+L) \Delta(R) \Delta(P) [-2iP^\beta \delta\Sigma_{\alpha\beta}^{RA}(P)] \\
&\times P_{\rho\sigma}^{T,L}(L) [-32P^\rho P^\sigma P^\alpha L^2], \tag{10.7}
\end{aligned}$$

et enfin pour la contribution de la coupure ( $\gamma$ ), on a

$$\text{Im } \Pi^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) \Big|_{(\gamma)} = \text{Im } \Pi^{RA}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) \Big|_{(\beta)}. \tag{10.8}$$

Dans la somme de ces contributions, je ne vais garder que la partie réelle de la correction de self-énergie (en effet, les contributions contenant la partie imaginaire seraient de toutes façons incomplètes, puisque la coupure traversant la

---

<sup>6</sup>Comme la boucle associée à cette self-énergie contient également une contribution de température nulle, il faut également procéder à la renormalisation des divergences ultraviolettes. Je suppose ici que cela a déjà été fait.

self-énergie n'a pas été prise en compte). On constate en faisant la somme des trois contributions précédentes que de nombreux facteurs sont communs aux trois termes, ce qui permet de simplifier notablement les expressions. On voit qu'on peut tout regrouper sous la forme

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^{\text{RA}}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) \Big|_{(\alpha+\beta+\gamma)} &\approx \frac{e^2 g^2 N C_F^2}{2} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} [* \Delta_{T,L}^R(L) - * \Delta_{T,L}^A(L)] \\ &\times [\Delta^R(R+L) - \Delta^A(R+L)] \\ &\times (n_F(r_o) - n_F(p_o))(n_B(l_o) + n_F(r_o + l_o)) \\ &\times \Delta(P+L) \Delta(R) 2\pi \epsilon(p_o) \\ &\times P_{\rho\sigma}^{T,L}(L) [64 P^\rho P^\sigma L^2] \\ &\times [\Delta(R) \delta(P^2 - M_\infty^2) \delta M_\infty^2(R) + i \delta'(P^2 - M_\infty^2) \delta M_\infty^2(P)] . \end{aligned} \quad (10.9)$$

où je note  $\delta M_\infty^2(S) \equiv -i P^\alpha P^\beta \text{Re}(\delta \Sigma_{\alpha\beta}^{\text{RA}}(S))$ .

A ce stade, on peut comme dans le chapitre précédent utiliser la discontinuité  $\delta((R+L)^2 - M_\infty^2)$  pour extraire le cosinus de l'angle  $\theta'$  entre les vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{l}$ . Cela donne

$$\cos \theta' = \frac{R^2 + L^2 + 2r_o l_o - M_\infty^2}{2rl} . \quad (10.10)$$

Une fois l'intégration sur  $\cos \theta'$  effectuée à l'aide de cette distribution, il reste dans chacun des deux termes soit une distribution  $\delta(P^2 - M_\infty^2)$ , soit la dérivée de cette distribution. Pour le terme contenant la dérivée, on peut commencer par la réécrire sous la forme

$$\delta'(P^2 - M_\infty^2) = -\frac{\partial}{\partial M_\infty^2} \delta(P^2 - M_\infty^2) , \quad (10.11)$$

pour ensuite intégrer par parties afin de se ramener à la structure de l'autre terme. Afin de mener à bien cette intégration par parties, on a besoin de

$$\frac{\partial \cos \theta'}{\partial M_\infty^2} = -\frac{1}{2rl} , \quad (10.12)$$

qui entraîne dans la configuration colinéaire

$$\frac{\partial \cos \theta_{pl}}{\partial M_\infty^2} \approx \left(1 - \frac{q}{p}\right) \frac{\partial \cos \theta'}{\partial M_\infty^2} \approx -\left(1 - \frac{q}{p}\right) \frac{1}{2rl} , \quad (10.13)$$

où  $\theta_{pl}$  est l'angle entre  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{l}$ . A partir de là, on obtient sans peine

$$\frac{\partial}{\partial M_\infty^2} [(P+L)^2 - M_\infty^2] = -2pl \frac{\partial \cos \theta_{pl}}{\partial M_\infty^2} - 1 \approx -\frac{2q}{r} . \quad (10.14)$$

Si on effectue cette intégration par parties sur le second terme, on obtient

$$\text{Im } \Pi^{\text{RA}}_{\mu}{}^{\mu}(q_o, \mathbf{q}) \Big|_{(\alpha+\beta+\gamma)} \approx \frac{e^2 g^2 N C_F^2}{2} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^3} \int \frac{l^2 dl dl_o d\phi}{(2\pi)^3}$$

$$\begin{aligned}
& \times [{}^*\Delta_{T,L}^R(L) - {}^*\Delta_{T,L}^A(L)] (n_F(r_o) - n_F(p_o))(n_B(l_o) + n_F(r_o + l_o)) \\
& \times P_{\rho\sigma}^{T,L}(L)[64P^\rho P^\sigma L^2] \frac{1}{2rl} \delta(P^2 - M_\infty^2) \\
& \times \left[ \Delta(P+L)\Delta^2(R)(\delta M_\infty^2(R) - \delta M_\infty^2(P)) \right. \\
& \quad - \Delta^2(P+L)\Delta(R) \frac{2q}{r} \delta M_\infty^2(P) \\
& \quad \left. - \Delta(P+L)\Delta(R) \frac{\partial \delta M_\infty^2(P)}{\partial M_\infty^2} \right]. \tag{10.15}
\end{aligned}$$

On peut tout d'abord constater que les préfacteurs sont très semblables à ceux que nous avons rencontré à deux boucles. La seule chose qui change est d'une part le nombre de dénominateurs qui peut aller jusqu'à trois, et d'autre part la présence en facteur de la correction  $\delta M_\infty^2$ . Les seuls termes véritablement délicats dans la limite colinéaire sont ceux qui ont trois dénominateurs. En effet, les trois dénominateurs s'annulent presque simultanément, et le résidu associé aux pôles correspondants va être très grand. On peut vérifier que la présence d'un dénominateur supplémentaire compense le facteur  $\delta M_\infty^2 \sim g^3 T^2$ , de sorte que ces corrections sont potentiellement du même ordre de grandeur que les contributions à deux boucles. Toutefois, pour le premier terme, la correction à la masse apparaît dans la combinaison  $\delta M_\infty^2(R) - \delta M_\infty^2(P)$  qui est supprimée par un facteur  $q/r \ll 1$  lorsque  $q$  est mou.<sup>7</sup> De même dans le second terme, on a également un facteur additionnel en  $q/r$ . Quant au troisième terme, il ne posait aucun problème dès le départ.

## Résumé

On voit donc finalement que les trois coupures faisant intervenir une correction à la masse  $M_\infty$  conspirent de façon à rendre sous dominante toute correction d'ordre supérieur à cette masse asymptotique. Cela réconcilie donc l'approche purement perturbative avec les considérations basées sur la structure du résultat à deux boucles. Une réserve s'impose toutefois : la conclusion précédente suppose que la quantité que je note  $\delta M_\infty^2$  soit effectivement négligeable devant  $M_\infty^2$ . En d'autres termes, cela suppose que l'approximation de boucle dure fournisse correctement la masse thermique d'un quark dur. Si cela est bien le cas, les corrections de self-énergie sur les quarks ne peuvent contribuer que par leur partie imaginaire. Dans le contexte perturbatif, cela correspond au début de la sommation d'une largeur sur le propagateur du quark si celui-ci est de genre temps.

---

<sup>7</sup>Il semble donc que l'on ne puisse pas utiliser cet argument lorsque le photon produit est dur. Cette limitation est cependant fortement dépendante de la façon dont  $\delta M_\infty^2$  dépend de l'impulsion du quark.

## 10.2.3 Compensations dans le secteur infrarouge

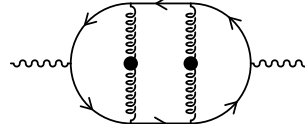
### Introduction

Un autre secteur où des résultats préliminaires ont été obtenus est celui des divergences infrarouges associées aux gluons mous, particulièrement transverses. En effet, à deux boucles, *i.e.* avec un seul gluon, nous avons vu que la contribution transverse souffrait d'une divergence infrarouge, écrantée par un mécanisme cinématique faisant intervenir la masse asymptotique du quark. Je vais sur un exemple de topologie à trois boucles montrer que des compensations infrarouges pourraient se produire entre corrections virtuelles et réelles.

### Diagramme étudié

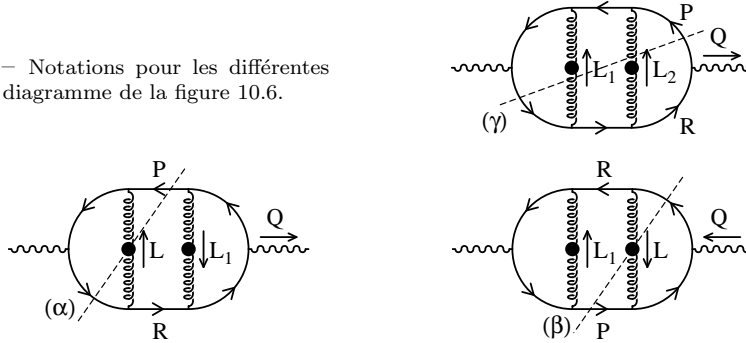
Considérons la topologie en échelle où deux gluons sont échangés, représentée sur la figure 10.6. Ici encore, il y a plusieurs coupures possibles, et il est commode

FIG. 10.6 – Diagramme en échelle à trois boucles.



de nommer les impulsions internes différemment suivant la coupure considérée. Le choix des notations est représenté sur la figure 10.7. Pour la coupure  $(\gamma)$ ,

FIG. 10.7 – Notations pour les différentes coupures du diagramme de la figure 10.6.



je note en outre  $L \equiv L_1 + L_2$ . L'avantage d'utiliser des notations qui changent suivant la coupure considérée est de permettre d'avoir des impulsions communes pour les deux quarks coupés. Ainsi, les deux fonctions  $\delta(\cdot)$  venant des quarks coupés, ainsi que les propagateurs qui sont en vis à vis de ces coupures, pourront

être mis en facteur dans la somme sur les trois coupures. Comme ce sont ces facteurs qui contrôlent l'accroissement dû aux divergences colinéaires, cet aspect important du calcul sera traité de façon uniforme pour les trois coupures. On peut se convaincre dès maintenant de l'égalité des contributions des coupures  $(\alpha)$  et  $(\beta)$ , de sorte que deux coupures seulement sont distinctes.

### Expression des traces

La trace des matrices de DIRAC correspondant à la coupure  $(\gamma)$  donnée par la formule (9.21) peut encore se simplifier en éliminant les termes qui compensent des dénominateurs singuliers (approximation colinéaire), ce qui donne :

$$\text{Tr}^{\alpha\beta;\rho\sigma}(\gamma) = -64L^2 P^\alpha P^\beta P^\rho P^\sigma, \quad (10.16)$$

où les indices  $\alpha, \beta, \rho$  et  $\sigma$  sont les indices de LORENTZ portés par les deux gluons. Pour ce qui est de la coupure  $(\alpha)$ , cette trace ne pas se simplifier autant,<sup>8</sup> et la formule (9.21) donne ici

$$\begin{aligned} \text{Tr}^{\alpha\beta;\rho\sigma}(\alpha) = & -64(L - L_1)^2 P^\alpha P^\beta P^\rho P^\sigma \\ & -64(P \cdot L_1) P^\alpha P^\beta (2L^\rho P^\sigma) \\ & -64(P \cdot L_1)^2 P^\alpha P^\beta g^{\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Ici, il faut être un peu plus précis et dire que les indices  $\alpha$  et  $\beta$  sont ceux du gluon coupé.

### Compensations entre les coupures

On peut ensuite donner l'expression de la somme des contributions des trois coupures au tenseur de polarisation du photon

$$\begin{aligned} \text{Im } \Pi^{\mu RA}_{\mu}(q_o, \mathbf{q}) \Big|_{(\alpha+\beta+\gamma)} & \approx \frac{e^2 g^4 N C_F^2}{2} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 L}{(2\pi)^4} [n_F(r_o) - n_F(p_o)] \\ & \times [\Delta^R(R+L) - \Delta^A(R+L)][\Delta^R(P) - \Delta^A(P)] \\ & \times 2n_B(l_o) \Delta(R) \Delta(P+L) \\ & \times \int \frac{d^4 L_1}{(2\pi)^4} n_B(l_1^o) \Delta(P+L_1) \Delta(R+L_1) [* \Delta^R(L_1) - * \Delta^A(L_1)] P_{\rho\sigma}^{T,L}(L_1) \\ & \times \left\{ [* \Delta^R(L-L_1) - * \Delta^A(L-L_1)] P_{\alpha\beta}^{T,L}(L-L_1) \text{Tr}^{\alpha\beta;\rho\sigma}(\gamma) \right. \\ & \quad \left. - [* \Delta^R(L) - * \Delta^A(L)] P_{\alpha\beta}^{T,L}(L) \text{Tr}^{\alpha\beta;\rho\sigma}(\alpha) \right\}. \end{aligned} \quad (10.18)$$

---

<sup>8</sup>En effet, les propagateurs les plus singuliers dans le secteur colinéaire sont ceux qui sont en vis à vis des propagateurs coupés. Or, la formule (9.21) fait jouer un rôle particulier aux propagateurs adjacents aux photons externes. Lorsque les propagateurs les plus singuliers sont adjacents aux photons externes, des simplifications supplémentaires se produisent, car de nombreux termes de (9.21) compensent des dénominateurs susceptibles de s'annuler. C'est précisément ce qui s'est produit pour la coupure  $(\gamma)$ . Ces simplifications n'ont plus lieu dans le cas de la coupure  $(\alpha)$ .

La formule précédente a été donnée dans la limite où les gluons sont mous, ce qui a permis de négliger le poids statistique fermionique qui accompagne usuellement les poids statistiques bosoniques. On constate en particulier une très forte similarité avec les expressions pour le diagramme de vertex à deux boucles, la différence principale étant la présence d’une intégrale sur une impulsion de gluon supplémentaire, dont l’impulsion est  $L_1$ . Par comptage de puissance, cette intégrale peut être singulière dans l’infrarouge.

Si on utilise les expressions obtenues plus haut pour les traces, il semble que les deux termes dans la dernière accolade se compensent lorsque  $L_1$  tend vers zéro à  $L$  fixé. La divergence infrarouge qui est susceptible de rendre l’intégrale sur  $L_1$  singulière semble donc être atténuée par ce qui apparaît comme une compensation entre des corrections virtuelles (coupures  $(\alpha)$  et  $(\beta)$  où une boucle n’est pas coupée) et réelles (coupure  $(\gamma)$ ).

Dans le cas où les gluons sont longitudinaux, cette compensation associée au comptage de puissance permettrait de dire que ces corrections en échelle à trois boucles sont supprimées par au moins une puissance de  $g$  par rapport au résultat obtenu à deux boucles. Par contre, la situation est beaucoup plus confuse dans le cas des gluons transverses, pour lesquels il faut aller plus loin que le comptage de puissances pour pouvoir conclure quant à la sensibilité du résultat vis à vis de l’échelle magnétique.

#### 10.2.4 Conclusions préliminaires

Pour conclure cette section sur deux aspects du calcul perturbatif à trois boucles, on peut dire d’une part que seule une correction donnant une largeur aura un effet sur le propagateur du quark. D’autre part, un calcul préliminaire semble indiquer sur un exemple que des compensations entre corrections virtuelles et réelles se produisent dans le secteur infrarouge, mais que cela n’est pas suffisant pour conclure simplement à la finitude de la contribution des gluons transverses.

### 10.3 Inclusion d’une largeur

#### 10.3.1 Régularisation par une largeur

Dans un article récent [136], NIEGAWA suggérait que tenir compte de la durée de vie finie des quasi-particules était suffisant pour écranter les divergences colinéaires dans le calcul du taux de production de photons réels.<sup>9</sup> Du point de vue technique, cela revient à utiliser pour les quarks un propagateur sur lequel on a sommé une self-énergie possédant une partie imaginaire dans la région de genre temps. En particulier, cela nécessite d’avoir procédé à une réorganisation de la série perturbative qui va au delà de la théorie effective basée sur les boucles dures.

---

<sup>9</sup>Même si cette assertion est correcte, son calcul passe cependant à coté des contributions dominantes au taux de production de photons mous réels comme le bremsstrahlung.

En fait, on peut tout d'abord dire que de manière évidente l'inclusion d'une largeur sur le propagateur d'un quark empêche son dénominateur de s'annuler. En effet, cette largeur, que je vais noter  $\gamma$  par la suite, opère la modification suivante sur le dénominateur d'un propagateur :<sup>10</sup>

$$P^2 - M_\infty^2 \rightarrow P^2 - M_\infty^2 + 2ip\gamma, \quad (10.19)$$

qui ne peut par conséquent plus s'annuler pour des valeurs réelles des paramètres.

Dans le même ordre d'idées, QUACK et HENNING, dans [139], calculent le taux de production de photons à une boucle en utilisant des propagateurs de quark munis d'une largeur. Le résultat qu'ils obtiennent indique une suppression du spectre de photons, pour des photons dont l'énergie est inférieure à la largeur  $\gamma$ . Ils en concluent un peu hâtivement<sup>11</sup> que c'est donc ce diagramme qui permet de retrouver l'effet LPM en théorie des champs à température finie. Même si ce résultat, contrairement à ce qu'affirment ses auteurs, ne reproduit pas l'effet LPM, il est cependant raisonnable de penser que cet effet arrivera en théorie des champs à température finie par le biais de la largeur  $\gamma$ . En effet, un paramètre important pour l'effet LPM dans l'approche semi-classique est le libre parcours moyen du fermion dans le plasma. Or, en théorie des champs, ce libre parcours moyen est inversement proportionnel à la largeur  $\gamma$ .

### 10.3.2 Problèmes avec l'invariance de jauge

Dans les articles [55, 140], LEBEDEV et SMILGA notaient que les calculs perturbatifs effectués avec un propagateur effectif sur lequel on a préalablement inclus une largeur  $\gamma$  conduisent à des résultats qui ne sont pas compatibles avec l'invariance de jauge.<sup>12</sup> Ces problèmes sont faciles à comprendre si on se rappelle que la largeur vient perturbativement des corrections de self-énergie, alors que l'on doit inclure simultanément des corrections de self-énergie et des corrections de vertex pour respecter l'invariance de jauge.

Dans ces articles, LEBEDEV et SMILGA identifient les diagrammes en échelle comme étant les corrections de vertex qui permettent de rétablir l'invariance de jauge dans le calcul du tenseur de polarisation du photon à l'aide de quarks possédant une largeur. Par ailleurs, ils proposent une technique d'approximation permettant de sommer les contributions dominantes issues de ces diagrammes

<sup>10</sup>Ici, je suppose pour simplifier que le propagateur du fermion possède un pôle complexe. Toutefois, des études non-perturbatives [137, 138] semblent indiquer que ce propagateur ne possède pas de pôle. Du point de vue phénoménologique, tout se passe cependant comme si la discontinuité de ce propagateur avait une largeur d'ordre  $\gamma \sim g^2 T$ .

<sup>11</sup>En effet, si on regarde en détail le spectre qu'ils obtiennent, il ne se comporte pas en  $q_o^{-1/2}$  à basse énergie. Par ailleurs, dans le langage perturbatif, le diagramme à une boucle qu'ils ont considéré n'inclut que des corrections de self-énergie. En d'autres termes, il n'inclut que des carrés d'amplitudes mais pas d'interférences. Or, il semble que les interférences soient essentielles dans l'approche semi-classique pour obtenir l'effet LPM.

<sup>12</sup>D'autres problèmes sont à attendre également avec l'unitarité de la théorie. Ces problèmes existent en fait déjà à température nulle. Dans ce contexte, on pourra voir [141, 142] par exemple.

en échelle. De façon sommaire, cette méthode consiste tout d'abord à écrire une équation de DYSON-SCHWINGER pour le tenseur de polarisation du photon. Cette équation fait intervenir le propagateur exact du quark, qui est ici approximé par un propagateur ayant une masse et une largeur, et le vertex  $\gamma q\bar{q}$  exact. Ce dernier est approximé par le vertex obtenu lorsqu'on somme toutes les corrections en échelle.

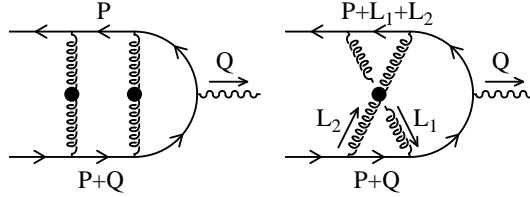
### 10.3.3 Importance des diagrammes en échelle

LEBEDEV et SMILGA donnent un argument selon lequel les corrections obtenues en croisant les “barreaux” de l'échelle sont sous-dominantes. En effet, dans les diagrammes en échelle, on peut grouper les propagateurs de quarks par paires de la forme

$$\Delta(P)\Delta(P+Q), \quad (10.20)$$

où  $Q$  est l'impulsion du photon externe. Cette combinaison peut poser des problèmes si  $Q$  est une impulsion très petite, et si l'un des propagateurs est retardé alors que l'autre est avancé. En effet, on aura alors deux pôles très proches l'un de l'autre, mais situés de part et d'autre de l'axe réel. Une telle configuration est donc susceptible de donner une contribution importante, car le contour d'intégration ne peut pas être déformé de façon à éviter de passer au voisinage des pôles. Au contraire, si au lieu de considérer un diagramme en

FIG. 10.8 – Argument de Lebedev et Smilga pour éliminer les diagrammes où des gluons sont croisés.



échelle on croise certains propagateurs de gluons, alors au moins une des paires précédentes va se transformer en

$$\Delta(P+L)\Delta(P+Q), \quad (10.21)$$

où  $L$  est une combinaison linéaire des impulsions des gluons internes au diagramme. Par conséquent, dans la limite où l'impulsion externe  $Q$  devient très petite, les deux pôles ne se rapprochent pas indéfiniment à cause de  $L$ .<sup>13</sup> Par conséquent, cet argument implique que les diagrammes avec des gluons croisés vont être sous dominants.

<sup>13</sup>Cet argument suppose implicitement que l'échelle typique de l'impulsion  $L$  des gluons internes est donnée par des masses thermiques d'ordre  $gT$ . Ceci n'est pas nécessairement le cas si les gluons sont transverses, puisqu'il n'y a pas d'écrantage de DEBYE des modes transverses statiques. Cette possibilité fait que l'on ne peut plus exclure les diagrammes où des gluons transverses très mous sont croisés, et a été considérée dans [143, 144].



Ensuite, LEBEDEV et SMILGA écrivent le vertex qui résulte de la sommation de la série infinie des corrections en échelle comme solution d'une équation de BETHE-SALPETHER. Afin de résoudre cette équation, ils font d'autres approximations dont l'effet est de transformer une équation fonctionnelle intégrale en une simple équation matricielle. Il suffit ensuite de reporter cette solution dans l'équation de DYSON-SCHWINGER pour avoir le tenseur de polarisation du photon. Le résultat inattendu est que la largeur incluse sur le propagateur des quarks compense l'effet des corrections en échelle au niveau du vertex  $\gamma q\bar{q}$ , de sorte qu'ils obtiennent finalement la même expression que celle qui est obtenue en utilisant des vertex nus et des propagateurs de quark sans largeur. Ces compensations ont également été constatées dans le cas de l'électrodynamique scalaire dans [56], et interprétées de façon un peu plus générale dans les articles [145, 146].

Toutefois, le statut de ces compensations et des approximations qui y conduisent est un peu confus. En effet, l'article [56] obtient pour le tenseur de polarisation du photon un résultat qui impliquerait la non nullité de la masse magnétique du photon en QED scalaire. Or, il a été prouvé que cette masse magnétique est nulle à tous les ordres de la théorie des perturbations, et ce résultat est étroitement relié à l'invariance de jauge. Le résultat obtenu par [56] semble donc indiquer que l'invariance de jauge a été perdue lors d'une étape intermédiaire du calcul.

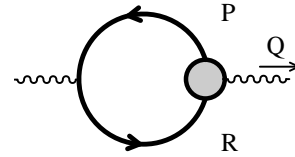
### 10.3.4 Tentative d'application à la production de photons

#### Equation de Dyson-Schwinger

Dans les articles [55, 140], cette technique est utilisée pour calculer la partie réelle du tenseur de polarisation du photon. Je vais maintenant présenter une tentative d'extension de cette méthode au calcul de  $\text{Im } \Pi_\mu^\mu$ , puisque c'est de cette quantité que nous avons besoin pour calculer le taux de production de photons.

Il faut commencer par écrire le tenseur de polarisation du photon à l'aide d'une équation de DYSON-SCHWINGER, comme indiqué sur la figure 10.9. Sur

FIG. 10.9 – Equation de Dyson-Schwinger pour le tenseur de polarisation du photon.



cette figure, la boule grise désigne en principe un vertex exact. De même, les propagateurs représentés en gras sont des propagateurs exacts. Si on note  $*S$  le propagateur exact pour les quarks, et  $*T^\mu$  le vertex  $\gamma q\bar{q}$  exact, on peut écrire la

partie imaginaire du tenseur de polarisation du photon sous la forme :<sup>14</sup>

$$\begin{aligned}
\text{Im } \Pi^{\mu}_{\mu}{}^{RA}(q_o, \mathbf{q}) &= \frac{1}{2}(\Pi^{\mu}_{\mu}{}^{RA}(q_o, \mathbf{q}) - \Pi^{\mu}_{\mu}{}^{AR}(q_o, \mathbf{q})) \\
&= \frac{e^2}{2} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \left\{ (n_F(r_o) - n_F(p_o)) \left[ \text{Tr} (*\tilde{\Gamma}_{\mu}^{RAA}(-P, R, -Q) *S^R(R) \gamma^{\mu} *S^A(P)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \text{Tr} (*\tilde{\Gamma}_{\mu}^{AAR}(-P, R, -Q) *S^A(R) \gamma^{\mu} *S^R(P)) \right] \right. \\
&\quad \left. + n_F(r_o) \left[ \text{Tr} (*\tilde{\Gamma}_{\mu}^{RAA}(-P, R, -Q) *S^A(R) \gamma^{\mu} *S^A(P)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \text{Tr} (*\tilde{\Gamma}_{\mu}^{ARR}(-P, R, -Q) *S^R(R) \gamma^{\mu} *S^R(P)) \right] \right. \\
&\quad \left. + n_F(p_o) \left[ \text{Tr} (*\tilde{\Gamma}_{\mu}^{RAA}(-P, R, -Q) *S^A(R) \gamma^{\mu} *S^A(P)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \text{Tr} (*\tilde{\Gamma}_{\mu}^{ARA}(-P, R, -Q) *S^R(R) \gamma^{\mu} *S^R(P)) \right] \right\}. \quad (10.22)
\end{aligned}$$

Dans la formule précédente, les  $\tilde{\Gamma}$  sont définis à partir des  $*\Gamma$  (voir les articles [45, 47]) au moyen des relations suivantes :

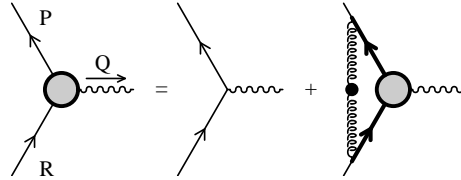
$$\begin{aligned}
*\Gamma^{RAA}(-P, R, -Q) &= -ie(1 - n_F(r_o) + n_B(-q_o)) \tilde{\Gamma}^{RAA}(-P, R, -Q) \\
*\Gamma^{RAA}(-P, R, -Q) &= -ie \tilde{\Gamma}^{RAA}(-P, R, -Q), \quad (10.23)
\end{aligned}$$

et de celles qui s'en déduisent à l'aide de permutations circulaires. Ces nouveaux vertex permettent de factoriser dès le départ les poids statistiques.

### Equation de Bethe-Salpether

Ensuite, on approxime les vertex qui apparaissent dans la formule 10.22 par les vertex résultant de la sommation de toutes les corrections en échelle. Cette approximation du vertex exact peut être vue comme une solution de l'équation de BETHE-SALPETHER représentée diagrammatiquement sur la figure 10.10. A

FIG. 10.10 – Equation de Bethe-Salpether pour le vertex dans l'approximation des corrections en échelle.



ce stade, il faut écrire cette équation pour les six façons de choisir les indices  $R$

<sup>14</sup>Pour obtenir cette partie imaginaire, on ne peut pas utiliser directement les règles de coupure. En effet, leur justification requiert que le vertex soit de la forme  $-i\lambda$ , où  $\lambda$  est un nombre réel, ce qui n'est pas le cas du vertex exact  $*\Gamma^{\mu}$ . On doit donc extraire la partie imaginaire à la main, en faisant la différence entre une fonction retardée et une fonction avancée.



### Solution approchée

A partir de l'équation simplifiée (10.24), on peut avoir recours aux mêmes approximations que celles qui ont été utilisées pour calculer la trace des matrices de DIRAC dans la section 9.4. On peut ainsi supposer que  $P^2$  est négligeable. Ainsi, si on écrit<sup>16</sup>

$${}^*\tilde{T}_\mu^{RAA}(-P, R, -Q) \equiv {}^*\tilde{T}_{\mu\nu}^{RAA}(-P, R, -Q)\gamma^\nu, \quad (10.28)$$

l'équation que doivent satisfaire les  ${}^*\tilde{T}_{\mu\nu}^{RAA}$  est de la forme :

$${}^*\tilde{T}_{\mu\nu}^{RAA}(-P, R, -Q) = g_{\mu\nu} - g^2 ({}^*\tilde{T}_{\mu\rho}^{RAA}(-P, R, -Q)P^\rho)P_\nu F(-P, R, -Q), \quad (10.29)$$

où  $F$  est un nombre donné par une intégrale associée à la boucle qui apparaît dans l'équation de BETHE-SALPETHER de la figure 10.10. Ensuite, si on forme le produit scalaire avec  $P^\nu$ , on obtient

$${}^*\tilde{T}_{\mu\nu}^{RAA}(-P, R, -Q)P^\nu = P_\mu, \quad (10.30)$$

si on néglige encore  $P^2$ . Il en résulte la solution suivante

$${}^*\tilde{T}_\mu^{RAA}(-P, R, -Q) = \gamma_\mu - g^2 P_\mu \not{P} F(-P, R, -Q). \quad (10.31)$$

Enfin, il suffit de plonger cette solution dans l'équation de DYSON-SCHWINGER (10.22) pour la partie imaginaire du tenseur de polarisation du photon, ce qui donne... 0. Il est en fait assez facile de comprendre pourquoi les approximations faites par LEBEDEV et SMILGA donnent un résultat nul lorsqu'on les applique à cette quantité (alors qu'elles sont suffisantes pour calculer la partie réelle du même tenseur de polarisation). En effet, on a vu dans la section 9.4 de façon tout à fait générale que la trace des matrices de DIRAC associée à tout diagramme ayant une boucle de quarks et un nombre indéterminé de gluons ne commence qu'à l'ordre 2 dans les impulsions des gluons ou du photon externe qui sont supposés mous. Or, les approximations faites plus haut, qu'il s'agisse de l'approximation infrarouge ou de l'approximation qui consiste à supposer que  $P^2 = 0$ , reviennent à négliger toute correction au delà de l'ordre 0 dans ces impulsions. Il est donc tout à fait normal d'obtenir un résultat nul.

### Conclusion

Cet échec, ainsi que l'étude de la section 9.4, indiquent ce qu'il faudrait faire : ne pas négliger systématiquement les corrections molles dans la détermination de la solution de l'équation de BETHE-SALPETHER. Ce programme est cependant tout à fait théorique. En effet, ces simplifications étaient absolument nécessaires d'une part pour découpler les équations pour les diverses composantes du vertex dans le formalisme retardé-avancé, et d'autre part pour éviter d'avoir à résoudre des équations intégrales.

---

<sup>16</sup>Comme les  $\gamma^\nu$  ne constituent pas une base, ceci n'est pas la décomposition la plus générale que l'on peut écrire pour le vertex  ${}^*\tilde{T}_\mu^{RAA}(-P, R, -Q)$ . Toutefois, on va voir que cela suffit pour obtenir *une* solution. Cette solution n'est pas forcément unique.

# Conclusions

Cette deuxième partie peut être lue de deux façons. Tout d’abord, elle résout quelques questions relatives à la production de photons par un plasma de quarks et de gluons. En particulier, elle réconcilie la théorie des champs à température finie avec d’autres approches qui considèrent que le bremsstrahlung est une contribution essentielle au taux de production de photons. Dans tous les cas de figure (photons mous virtuels, photons réels), les prédictions existantes reçoivent des corrections importantes des diagrammes à deux boucles que nous avons considéré, ce qui peut avoir quelques conséquences phénoménologiques.

La deuxième manière de lire cette partie est un peu plus formelle et consiste à l’envisager sous l’angle de la théorie effective obtenue en sommant les boucles dures. Deux déficiences prévisibles de cette théorie effective sont apparues explicitement dans le calcul du taux de production de photons. Le taux de production de photons virtuels a d’abord montré que les boucles dures deviennent incomplètes lorsqu’on extrapole leur discontinuité dans la région dure. L’exemple sur lequel ce problème est apparu mettait en jeu la discontinuité d’un propagateur effectif dans la région de genre espace, qui fait intervenir la discontinuité de la boucle dure contenue dans la fonction à deux points. La solution à ce problème consiste à inclure un diagramme comportant une boucle de plus. L’autre problème est apparu avec la production de photons réels ou de très petite masse invariante. Cette fois, on constate que des contributions à deux boucles que les divergences colinéaires rendent dominantes sont perdues à une boucle à cause de l’approximation de boucle dure. Autrement dit, l’approximation de boucle dure donne un coefficient nul à des termes importants, qu’il faut aller ensuite chercher à deux boucles.

Enfin, on a envisagé dans le dernier chapitre quelques pistes afin de compléter le calcul du taux de production de photons. Guidés par l’effet LPM dans le choix des topologies à considérer, l’approche perturbative semble indiquer d’une part que la seule modification qui est pertinente maintenant pour le propagateur du quark est l’inclusion d’une largeur, et d’autre part que des compensations auraient lieu (topologie par topologie) dans le secteur infrarouge. Ces compensations infrarouges sont toutefois insuffisantes pour conclure par un simple comptage de puissances à la finitude du résultat lorsque les gluons impliqués sont transverses. Ensuite, j’ai montré que l’approche non-perturbative de LEBEDEV et SMILGA ne peut pas être utilisée pour obtenir l’effet de la largeur du quark sur le taux de production de photons. Ce résultat négatif souligne bien certaines

spécificités de la quantité qui nous intéresse ici, et notamment le fait qu'elle est sous dominante par rapport à la partie réelle du tenseur de polarisation, de sorte qu'elle ne peut pas être atteinte par les mêmes approximations.

Deux directions semblent possibles à la suite de ce travail. On peut tout d'abord essayer de voir quelle théorie effective (*i.e.* quelle réorganisation de la série perturbative) permettrait de regrouper dans les diagrammes d'ordre le plus bas toutes les contributions dominantes. Un autre problème consiste à trouver un moyen d'étudier les effets de la largeur des quarks sur le taux de production de photons, puisqu'il semble que c'est par là que viendra l'effet LPM.



Troisième partie

**Compléments techniques**





## Annexe A

# Distributions

C'est la raison pour laquelle j'ai un peu pris en horreur la théorie de la transformation de Fourier.[...] je l'ai toujours trouvée odieusement linéaire. Trop linéaire pour être sérieuse.

RENÉ THOM  
*Paraboles et catastrophes*

**L**e chapitre 3, dans lequel sont justifiées les règles de FEYNMAN du formalisme à temps réel, fait appel à quelques éléments de théorie des distributions. Apparaissent également quelques questions plus délicates comme celle de la multiplication des distributions à propos des pathologies.

Le but de cet appendice est de rappeler les aspects de la théorie des distributions qui sont utilisés dans ce chapitre. Je commencerai donc par un bref rappel de quelques définitions et propriétés de base. Ensuite, j'exposerai quelques résultats relatifs à la transformation de FOURIER des distributions. Jusque là, il s'agit de sujets parfaitement connus et balisés. Viendra ensuite la question beaucoup plus délicate de la multiplication des distributions. Je montrerai que la multiplication des distributions n'existe pas toujours, et qu'elle peut être ambiguë même dans les situations où elle semble pouvoir être définie. Quelques ouvrages classiques auxquels on peut se reporter à ce sujet sont [147, 148, 149, 150, 151].

## A.1 Éléments de théorie des distributions

### A.1.1 Définition

Soit  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes définies sur  $\mathbb{R}^n$ , indéfiniment différentiables, et à support compact. On dit qu'une suite  $(\phi_p)_{p \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  converge vers zéro dans l'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  si les supports des fonctions  $\phi_p$  sont contenus dans un même compact et si toutes les dérivées partielles successives de  $\phi_p$  convergent uniformément vers zéro sur  $\mathbb{R}^n$ .

On appelle distribution sur  $\mathbb{R}^n$  toute forme linéaire  $T$  sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  telle que, pour toute suite  $(\phi_p)_{p \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  convergeant vers zéro dans l'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $T(\phi_p)$  tende vers zéro. On note par  $\langle T, \phi \rangle$  la valeur prise par  $T$  sur un élément de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . L'ensemble des distributions  $T$  sur  $\mathbb{R}^n$  est noté  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ <sup>1</sup>.

Notons également que l'on peut définir la notion de distribution agissant sur une classe plus large de fonctions test sur  $\mathbb{R}^n$ . Ainsi, si  $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est un espace vectoriel de fonctions sur  $\mathbb{R}^n$ , on obtient un dual topologique  $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Ainsi, il sera parfois utile de se restreindre à l'ensemble des distributions sur les fonctions à décroissance rapide (*i.e.* qui tendent vers zéro à l'infini plus vite que toute puissance de  $1/|x|$ ), dont l'ensemble est noté  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Ces distributions sont dites distributions tempérées et leur ensemble est noté  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Il est possible de considérer une fonction  $\psi$  localement intégrable<sup>2</sup> comme une distribution, si l'on pose

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \psi, \phi \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}^n} d^n x \, \psi(x) \phi(x). \quad (\text{A.1})$$

Il est immédiat de vérifier qu'une telle définition correspond à celle qu'on a donné pour une distribution. Une telle distribution est qualifiée de distribution régulière. Deux fonctions localement intégrables définissent la même distribution si et seulement si elles sont égales presque partout. Par abus de langage, on adopte fréquemment une notation fonctionnelle pour des distributions non régulières. Ainsi,  $\langle T, \phi \rangle$  est parfois noté  $\int dx T(x) \phi(x)$ , même si  $T(x)$  n'a pas de sens en tant que fonction.

Par ailleurs, toutes les opérations sur les distributions devront être définies de façon à ce que cette définition appliquée aux distributions régulières soit en accord avec l'opération analogue sur les fonctions localement intégrables. Elles devront juste généraliser les opérations existantes aux distributions non régulières.

---

<sup>1</sup> Compte tenu de cette définition, les distributions sont des fonctionnelles linéaires continues sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  est le dual topologique de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  pour la topologie associée à la notion de convergence définie dans le premier paragraphe.

<sup>2</sup> Et plus généralement, toute mesure sur  $\mathbb{R}^n$ .

### A.1.2 Opérations de base

Quelques manipulations simples sur les distributions peuvent être définies à ce stade. La première opération qu'il est trivial de définir est la combinaison linéaire de deux distributions. Si  $\lambda_{1,2}$  sont deux nombres complexes et  $T_{1,2}$  deux distributions de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , la distribution  $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$  est définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2, \phi \rangle \equiv \lambda_1 \langle T_1, \phi \rangle + \lambda_2 \langle T_2, \phi \rangle . \quad (\text{A.2})$$

On peut également définir la translatée  $\tau_a T$  d'une distribution  $T$  par la relation

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \tau_a T, \phi \rangle \equiv \langle T, \tau_{-a} \phi \rangle , \quad (\text{A.3})$$

où je note  $(\tau_b \phi)(x) \equiv \phi(x - b)$ . Définissons aussi le produit d'une distribution  $T$  par une fonction  $f$ , noté  $fT$ , par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \langle fT, \phi \rangle \equiv \langle T, f\phi \rangle , \quad (\text{A.4})$$

Une autre opération extrêmement importante en théorie des distributions est la dérivation. Par analogie avec l'intégration par parties des fonctions à support compact, on définit

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \phi \rangle \equiv - \langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \rangle . \quad (\text{A.5})$$

Enfin, on peut aussi envisager la limite d'une suite de distributions. La convergence des distributions peut être définie en tant qu'éléments du dual de l'espace des fonctions test<sup>3</sup>. On dit ainsi que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = T$  si et seulement si

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle . \quad (\text{A.6})$$

Cette notion de convergence est celle qui est utilisée pour construire des suites de fonctions approximant une distribution. Cela permet de travailler avec des distributions régulières (*i.e.* des fonctions), qui sont des objets a priori plus familiers.

### A.1.3 Support d'une distribution

Le support  $\text{supp}(T)$  d'une distribution  $T$  est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel "la distribution est nulle". Plus précisément, on peut définir le support de  $T$  par  $\text{supp}(T) = \cap F$  où  $F$  parcourt l'ensemble des fermés de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $F \cap \text{supp}(\phi) = \emptyset \Rightarrow \langle T, \phi \rangle = 0$ . Cette définition se justifie par le fait qu'elle coïncide avec la définition du support des fonctions dans le cas des distributions régulières.

---

<sup>3</sup>On obtient une notion de convergence qui est dite "faible".

### A.1.4 Exemples

Je vais conclure cette section par quelques exemples de distributions qui sont rencontrées fréquemment en théorie des champs.

Soit  $f$  une fonction ayant une singularité à l'origine, mais dont l'intégrale existe si l'on exclut du domaine d'intégration une sphère centrée sur la singularité. On appelle partie principale de la fonction  $f$  la distribution notée  $\mathbb{P}f$  et définie de la façon suivante

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \mathbb{P}f, \phi \rangle \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \epsilon} d^n x f(x) \phi(x). \quad (\text{A.7})$$

Particulièrement importante est la partie principale de la fonction qui à  $x$  associe  $1/x$ . On peut montrer qu'elle est limite de la suite de fonctions  $x \mapsto x/(x^2 + \epsilon^2)$  lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro.

Une autre distribution jouant un rôle particulièrement important en théorie des champs est la distribution de DIRAC<sup>4</sup>, notée  $\delta$ , et définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \langle \delta, \phi \rangle \equiv \phi(0). \quad (\text{A.8})$$

Son support est réduit à  $\{0\}$ . Cette distribution peut être considérée comme la limite de la suite de fonctions qui à  $x$  associent  $\pi^{-1}\epsilon/(x^2 + \epsilon^2)$ , lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro par valeurs positives.

Cette "régularisation" n'est pas la seule qui soit possible, mais elle est néanmoins particulièrement utile car elle permet de voir la distribution de DIRAC à une dimension comme la discontinuité d'une fonction analytique à la traversée de l'axe réel. Plus précisément, si on considère la combinaison linéaire

$$\Delta_F(x) \equiv i\mathbb{P}\frac{1}{x} + \pi\delta(x) \quad (\text{A.9})$$

lorsque  $n = 1$ , on constate que cette nouvelle distribution peut être vue comme la limite lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro de la suite de fonctions  $x \mapsto i/(x + i\epsilon)$ . La distribution  $\Delta_F(x)$  peut donc être considérée comme la valeur au bord que prend la fonction analytique  $z \mapsto i/z$  lorsque l'on s'approche de l'axe réel du côté du demi-plan de partie imaginaire positive.

Notons également que la distribution de DIRAC unidimensionnelle est la dérivée première de la distribution de HEAVISIDE  $\theta$ , qui est définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle \theta, \phi \rangle \equiv \int_0^{+\infty} dx \phi(x). \quad (\text{A.10})$$

## A.2 Transformation de Fourier

La transformation de FOURIER est particulièrement utile en théorie des champs. Il est par conséquent indispensable de la généraliser aux distributions

---

<sup>4</sup>Historiquement, DIRAC a introduit en physique un objet noté  $\delta(x)$  dont le statut mathématique n'est devenu clair que plus tard avec les travaux de SCHWARTZ.

non régulières à partir de la définition que l'on connaît pour les fonctions. Il est toujours possible de définir la transformation de FOURIER  $\text{TF}(T)$  d'une distribution tempérée  $T$ , par la relation

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle \text{TF}(T), \phi \rangle \equiv \langle T, \text{TF}(\phi) \rangle . \quad (\text{A.11})$$

On rappelle que pour  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , la transformée de FOURIER est définie par

$$\text{TF}(\phi)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} d^n k e^{ik \cdot x} \phi(k) , \quad (\text{A.12})$$

qui s'inverse en

$$\phi(k) = \overline{\text{TF}}(\text{TF}(\phi))(k) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n x}{(2\pi)^n} e^{-ik \cdot x} \text{TF}(\phi)(x) . \quad (\text{A.13})$$

On montre que la transformée de FOURIER d'une distribution tempérée est une distribution tempérée.

A l'aide de cette définition, il est aisé d'obtenir

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle \text{TF}(\delta), \phi \rangle = \text{TF}(\phi)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n k \phi(k) , \quad (\text{A.14})$$

ce qui implique que la distribution  $\text{TF}(\delta)$  s'identifie avec la fonction identiquement égale à 1. Pour obtenir la transformée de FOURIER de la distribution  $\mathbb{P}(1/x)$ , il est plus simple de considérer d'abord la combinaison linéaire  $\Delta_F(x)$  définie plus haut, ou mieux encore sa version régularisée  $i/(x + i\epsilon)$ . On obtient ainsi en utilisant le théorème des résidus

$$\begin{aligned} \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle \text{TF}(\Delta_F), \phi \rangle &= \langle \Delta_F, \text{TF}(\phi) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \phi(k) \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ik \cdot x} \frac{i}{x + i\epsilon} \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dk \phi(k) \theta(-k) , \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

relation de laquelle on déduit  $\text{TF}(\Delta_F)(k) = -\theta(-k)$  et ensuite  $\text{TF}(\mathbb{P}/x)(k) = i\pi\epsilon(k)$ . Nous disposons maintenant des transformées de FOURIER de toutes les distributions élémentaires qui apparaissent dans le développement perturbatif de la théorie des champs à température finie.

Indiquons également la formule qui donne la transformée de FOURIER de la dérivée d'une distribution

$$\text{TF} \left[ \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] (k) = -ik_j \text{TF}(T)(k) , \quad (\text{A.16})$$

et une formule donnant la transformée de FOURIER de la translatée d'une distribution :

$$\text{TF}(\tau_a T)(k) = e^{ik \cdot a} \text{TF}(T)(k) . \quad (\text{A.17})$$

## A.3 Multiplication des distributions

### A.3.1 Position du problème

Le problème majeur en théorie des distributions est celui de la multiplication des distributions. Très peu de temps après avoir mis sur pied les fondements de la théorie des distributions, SCHWARTZ a prouvé un théorème qui semble empêcher la définition d'une multiplication ayant des propriétés raisonnables<sup>5</sup>. En guise d'exemple trivial, on se convaincra aisément qu'il est impossible de donner un sens à l'objet  $\delta^2$  en termes de distributions. Le problème que l'on rencontre ici est en fait très général, la multiplication des distributions se heurte à une obstruction de caractère local : pour que le produit existe, il faut que l'un des facteurs soit d'autant plus régulier en un point  $x$  que l'autre facteur est singulier en ce point [147]. Néanmoins, cette obstruction soulevée par SCHWARTZ n'implique pas que l'on ne puisse jamais définir le produit de deux distributions. En fait, on a déjà vu dans cette annexe que l'on peut aisément définir le produit d'une distribution par une fonction (*i.e.* par une distribution régulière). Nous verrons par la suite qu'il est parfois possible de donner un sens au produit de deux distributions non régulières.

### A.3.2 Produit direct de deux distributions

Avant d'aller plus loin, il est commode de définir une opération appelée produit direct de deux distributions agissant sur des variables distinctes. Soit  $S$  une distribution de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  et  $T$  un élément de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^p)$ . Si  $\psi$  est une fonction test de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+p})$ , alors  $\langle S, \psi \rangle$  est une fonction de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^p)$  et  $\langle T, \psi \rangle$  une fonction de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . On voit qu'il est toujours possible de définir un produit tensoriel  $S \otimes T$  par la relation

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+p}), \quad \langle S \otimes T, \psi \rangle \equiv \langle S, \langle T, \psi \rangle \rangle = \langle T, \langle S, \psi \rangle \rangle . \quad (\text{A.18})$$

### A.3.3 Produit de convolution

On veut définir une multiplication des distributions telle que la transformée de FOURIER du produit soit le produit de convolution des transformées de FOURIER, afin de préserver les techniques de calcul usuelles. Comme les distributions qui apparaissent dans les problèmes de théorie des champs sont presque exclusivement  $\delta(k)$  et  $\mathbb{P}/k$  dont les transformées de FOURIER sont des fonctions, il est beaucoup plus facile de ramener l'existence d'un produit de distributions à l'existence du produit de convolution de leurs transformées de FOURIER, puisqu'on aura alors affaire à des distributions régulières.

---

<sup>5</sup>Son étude consistait à voir si on pouvait définir une multiplication qui posséderait les mêmes propriétés que la multiplication des fonctions et dont la restriction aux fonctions reproduirait la multiplication qu'on connaît pour ces objets. En d'autres termes, il cherchait une multiplication qui soit commutative, associative et distributive sur l'addition, et a prouvé qu'il était impossible de munir  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  d'une multiplication qui en ferait une algèbre ayant de telles propriétés.

Le produit de convolution  $S * T$  de deux distributions peut être défini de la façon suivante, lorsque le second membre existe

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \langle S * T, \phi \rangle \equiv \langle S(x) \otimes T(y), \phi(x+y) \rangle . \quad (\text{A.19})$$

A la différence de la multiplication des distributions, les problèmes qui surviennent dans le produit de convolution ne sont pas de nature locale, mais plutôt reliés à la décroissance à l'infini des objets envisagés, et à leur support [147]. Il est facile de vérifier que le produit de convolution de  $m$  distributions existe si  $m-1$  d'entre elles au moins sont à support borné<sup>6</sup>. En fait, l'ensemble des distributions à support borné peut être muni d'une structure d'algèbre de convolution. Une situation moins restrictive, et plus utile pour nous est le cas de l'ensemble des distributions à support borné à gauche (resp. à droite) qui forme aussi une algèbre de convolution. Ainsi le produit de convolution  $(\theta * \theta)(x)$  existe et est égal à  $x\theta(x)$  dont le support est encore borné à gauche.

### A.3.4 Produits pathologiques

Nous disposons maintenant des outils nécessaires pour étudier plus spécifiquement les produits de distributions qui apparaissent dans le développement perturbatif de la théorie des champs à température finie. Comme les propagateurs libres sont des combinaisons linéaires<sup>7</sup> de  $\Delta_F(k^o \pm \omega_{\mathbf{k}})$  et  $\Delta_F^*(k^o \pm \omega_{\mathbf{k}}) = \Delta_F(-k^o \mp \omega_{\mathbf{k}})$ , il faut étudier l'existence des produits du type de

$$\delta\left(\sum_{i=1}^n k_i^o\right) \prod_{i=1}^n \Delta_F(\eta_i(k_i^o + \mu_i \omega_i)) , \quad (\text{A.21})$$

où les  $\eta_i$  et  $\mu_i$  sont égaux à  $\pm 1$ . La distribution de DIRAC qui assure la conservation globale de l'énergie doit toujours être ajoutée car ce type de produit apparaît lorsqu'on insère une fonction de vertex à  $n$  points entre  $n$  propagateurs libres, et toute fonction de vertex contient une telle distribution  $\delta$  en facteur.

En utilisant tout ce qui précède, on obtient aisément les transformées de FOURIER de chacun des facteurs de ce produit :

$$\begin{aligned} \text{TF}(\Delta_F(\eta_i k_i^o + \mu_i \omega_i))(\{x_i^o\}) &= -e^{-i\mu_i \omega_i x_i^o} \theta(-\eta_i x_i^o) \prod_{j \neq i} 2\pi \delta(x_j^o) \\ \text{TF}(\delta(\sum_{i=1}^n k_i^o))(\{x_i^o\}) &= \prod_{i=1}^{n-1} 2\pi \delta(x_i^o - x_n^o) . \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

<sup>6</sup>Ceci est une condition suffisante d'existence, qui n'est pas cependant pas nécessaire.

<sup>7</sup>Pour décomposer les propagateurs libres de cette façon, on peut utiliser la relation

$$\Delta_F(K^2 - m^2) = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} [\Delta_F(k_o - \omega_{\mathbf{k}}) + \Delta_F^*(k_o + \omega_{\mathbf{k}})] , \quad (\text{A.20})$$

avec  $\omega_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ .



Il suffit maintenant de chercher la condition d'existence du produit de convolution<sup>8</sup> des  $n + 1$  distributions précédentes. Les  $n$  premiers facteurs, qui sont les transformées de FOURIER des  $\Delta_F$ , ont une structure très simple : il s'agit du produit tensoriel d'une distribution régulière et de  $n - 1$  distributions de DIRAC. Or, la distribution  $\delta$  est l'élément neutre du produit de convolution. Il est donc immédiat de vérifier que le produit de convolution de ces  $n$  premiers facteurs donne

$$(-2\pi)^n \prod_{i=1}^n e^{-i\mu_i \omega_i x_i^o} \theta(-\eta_i x_i^o) . \quad (\text{A.23})$$

Il reste donc à convoluer cette distribution régulière avec la deuxième ligne de (A.22). Si on isole la  $n^{\text{ème}}$  variable, ce produit de convolution est proportionnel à

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dy_n^o \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[ \prod_{i=1}^n dy_i^o \delta(y_i^o - y_n^o) e^{i\mu_i \omega_i (y_i^o - x_i^o)} \theta(\eta_i (y_i^o - x_i^o)) \right] \\ &= \left[ \prod_{i=1}^n e^{-i\mu_i \omega_i x_i^o} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} dy_n^o \left[ \prod_{i=1}^n \theta(\eta_i (y_n^o - x_i^o)) \right] e^{i\Sigma y_n^o} , \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

où je note  $\Sigma \equiv \sum_{i=1}^n \mu_i \omega_i$ . Si les  $\eta_i$  ne sont pas tous de même signe, la dernière intégrale existe trivialement car il s'agit de l'intégrale d'une fonction bornée à support borné. Plaçons nous donc dans la situation où tous les  $\eta_i$  sont de même signe, auquel cas le support de la fonction sous l'intégrale est borné à droite ou à gauche, mais pas des deux cotés simultanément. Toutefois, si  $\Sigma \neq 0$ , cette intégrale possède encore un sens en tant que distribution. Le véritable danger ne vient que des points qui vérifient  $\Sigma = 0$ . Nous sommes donc arrivés au résultat suivant : le produit de distributions

$$\delta\left(\sum_{i=1}^n k_i^o\right) \prod_{i=1}^n \Delta_F(\eta_i(k_i^o + \mu_i \omega_i)) \quad (\text{A.25})$$

existe, excepté lorsque tous les  $\eta_i$  sont de même signe et  $\sum_{i=1}^n \mu_i \omega_i = 0$ .

### A.3.5 Non associativité du produit des distributions

Nous avons vu dans la section précédente une condition nécessaire et suffisante d'existence pour une classe de produits suffisamment large pour couvrir tous les cas rencontrés en théorie des champs à température finie. On peut cependant se demander si ces produits sont associatifs, *i.e.* s'ils dépendent de la façon dont on place les parenthèses pour déterminer l'ordre dans lequel on va

---

<sup>8</sup>On peut noter l'analogie méthodologique avec le traitement des divergences ultraviolettes. En effet, les divergences ultraviolettes sont en fait dues à des produits de distributions non définis dans l'espace des  $x$ . Quand on passe dans l'espace de FOURIER, elles apparaissent comme des divergences dans des produits de convolution de fonctions analytiques, ce qui les rend beaucoup plus faciles à identifier.

effectuer les convolutions. Comme les  $n$  premiers facteurs sont des produits tensoriels constitués de  $n - 1$  éléments neutres et d'un seul facteur non trivial, et qu'en outre ces facteurs non triviaux agissent chacun sur une variable distincte, le résultat de leur convolution ne dépend pas de la manière de placer les parenthèses. Il ne reste ensuite que le produit de convolution de deux distributions, pour lequel la question de l'associativité est évidemment sans objet.

Toutefois, ce n'est pas tout à fait la fin de l'histoire, car ce produit de distributions est en réalité en facteur d'une fonction qui contient des poids statistiques du diagramme. Naturellement, ce facteur supplémentaire ne change rien aux conditions d'existence établies plus haut pour ce produit. Par contre, il peut poser des problèmes avec l'associativité. Afin d'illustrer sommairement les problèmes auxquels on peut se trouver confronté, considérons l'exemple simple du produit  $f(x)\delta(x)(\mathbb{P}/x)$ , où  $f(x)$  est une fonction qui est continue et à dérivée continue à l'origine. A l'aide de ce qui précède, il est facile de vérifier les égalités suivantes

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x) \quad (\text{A.26-a})$$

$$\delta(x)\frac{\mathbb{P}}{x} = -\frac{1}{2}\delta'(x) . \quad (\text{A.26-b})$$

On peut ensuite évaluer le produit des trois termes pour diverses façons de placer les parenthèses. Les égalités suivantes sont vérifiées en faisant agir les distributions sur une fonction test :

$$(f(x)\delta(x))\frac{\mathbb{P}}{x} = f(0)\delta(x)\frac{\mathbb{P}}{x} = -\frac{f(0)}{2}\delta'(x) \quad (\text{A.27-a})$$

$$f(x)(\delta(x)\frac{\mathbb{P}}{x}) = -\frac{f(x)}{2}\delta'(x) = -\frac{f(0)}{2}\delta'(x) + \frac{f'(0)}{2}\delta(x) . \quad (\text{A.27-b})$$

On constate donc que le produit des distributions n'est en général pas associatif, même si on arrive à lui donner un sens [147]. Nous allons maintenant voir comment cette particularité apparaît si on voit les distributions  $\delta(x)$  et  $\mathbb{P}/x$  comme limites de suites de fonctions. Pour cela, je vais utiliser les suites de fonctions introduites dans le paragraphe A.1.4. On peut donc écrire

$$\langle f(x)\delta(x)\frac{\mathbb{P}}{x}, \phi(x) \rangle = \lim_{\epsilon, \eta \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)\phi(x) \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \frac{x}{x^2 + \eta^2} , \quad (\text{A.28})$$

sans se préoccuper pour l'instant de savoir si la limite existe. Très formellement, si on suppose que l'on peut utiliser le théorème des résidus en refermant le contour d'intégration dans le demi-plan supérieur et que les seuls pôles sont  $i\epsilon$  et  $i\eta$ , on obtient

$$\langle f(x)\delta(x)\frac{\mathbb{P}}{x}, \phi(x) \rangle = \lim_{\epsilon, \eta \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon}{\epsilon + \eta} [f'(0)\phi(0) + f(0)\phi'(0)] . \quad (\text{A.29})$$

On constate donc que la limite n'existe pas. Ce problème est la contrepartie

de l'absence d'associativité, lorsqu'on régularise les distributions. On voit en particulier que la régularisation ne résout pas ce type d'ambiguïtés<sup>9</sup>.

---

<sup>9</sup>Pour autant que je sache, on peut toujours donner un sens non ambigu au développement perturbatif de la théorie des champs à température finie, car ce type d'ambiguïtés disparaît lorsqu'on somme sur les indices 1 ou 2 portés par les vertex internes du diagramme considéré.

## Annexe B

# Intégrales fréquentes

There is always a well-known solution to every human problem - neat, plausible, and wrong.

HENRY LOUIS MENCKEN  
*Prejudices : Second Series.*

**D**ans cette annexe, j'expose le calcul d'une famille d'intégrales qui interviennent fréquemment dans les calculs perturbatifs en théorie des champs à température finie. Il s'agit des intégrales de la forme<sup>1</sup>  $\int dx P(x)Q(n_{B,F}(x))$  et  $\int dx \ln(x)P(x)Q(n_{B,F}(x))$ , où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes. Il apparaît qu'on peut donner une forme fermée relativement simple à ces intégrales, sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions  $\zeta$  et  $\zeta'$ .

### B.1 Intégrales du type $\int dx P(x)Q(n_{B,F}(x))$

Le but de cette section est le calcul des intégrales du type de

$$\int_0^{+\infty} dx P(x)Q\left(\frac{1}{e^x + \epsilon}\right), \quad (\text{B.1})$$

avec  $\epsilon = \pm 1$ , et où  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes. Il est trivial de voir que toutes se ramènent à des intégrales du type de

$$I_{n,p}^\epsilon \equiv \int_0^{+\infty} dx \frac{x^n}{(e^x + \epsilon)^p}, \quad (\text{B.2})$$

---

<sup>1</sup>Haber et Weldon proposent dans [152] l'étude des intégrales bosoniques contenant un poids statistique du type  $n_B(\sqrt{(x^2 + y^2)})$ , que l'on rencontre dans les théories massives. Ils donnent un développement en puissances de  $y^2$  de ces intégrales.

où  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ .<sup>2</sup>

Le point de départ pour calculer ces intégrales consiste à noter que  $e^{-x} \leq 1$ , ce qui permet de développer  $(e^x + \epsilon)^{-p}$  en puissances de  $e^{-x}$ . En faisant cela, on obtient

$$\frac{1}{(e^x + \epsilon)^p} = e^{-px} \sum_{m=0}^{+\infty} C_{-p}^m \epsilon^m e^{-mx} , \quad (\text{B.3})$$

où  $C_{-p}^m$  désigne une extension des coefficients binomiaux<sup>3</sup> définie par

$$C_{-p}^m \equiv \frac{(-p)(-p-1) \cdots (-p-m+1)}{m!} . \quad (\text{B.4})$$

Par la suite, il sera commode d'écrire ces coefficients sous la forme

$$C_{-p}^m = \frac{(-1)^m}{(p-1)!} Q_{p-1}(m+p) , \quad (\text{B.5})$$

où  $Q_n(x)$  est un polynôme défini par<sup>4</sup>

$$Q_n(x) \equiv (x-1)(x-2) \cdots (x-n) . \quad (\text{B.6})$$

En inversant cavalièrement la somme infinie et l'intégration, on obtient par le changement d'indice  $q = m + p$

$$\begin{aligned} I_{n,p}^\epsilon &= \frac{1}{(p-1)!} \sum_{q=p}^{+\infty} Q_{p-1}(q) (-\epsilon)^{q+p} \int_0^{+\infty} dx x^n e^{-qx} \\ &= \frac{(-\epsilon)^p}{(p-1)!} \sum_{q=1}^{+\infty} Q_{p-1}(q) (-\epsilon)^q \int_0^{+\infty} dx x^n e^{-qx} , \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

où le passage à la deuxième ligne exploite le fait que le polynôme  $Q_{p-1}$  a pour zéros les nombres  $1, 2, \dots, p-1$ . L'étape suivante consiste à écrire le polynôme  $Q_{p-1}(x)$  sous sa forme développée

$$Q_{p-1}(x) \equiv \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_{p-1,i} x^i , \quad (\text{B.8})$$

ce qui permet d'écrire

$$I_{n,p}^\epsilon = \frac{(-\epsilon)^p}{(p-1)!} \sum_{q=1}^{+\infty} (-\epsilon)^q \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_{p-1,i} q^i \int_0^{+\infty} dx x^n e^{-qx} . \quad (\text{B.9})$$

---

<sup>2</sup>Lorsque  $\epsilon = 1$ , l'intégrale existe toujours. Par contre, si  $\epsilon = -1$ , il faut en outre  $n \geq p$  pour que l'intégrale converge en  $x = 0$ .

<sup>3</sup>On peut voir la formule précédente comme résultant d'une formule de Newton généralisée.

<sup>4</sup>Pour être complet, il faut également définir :  $Q_0(x) \equiv 1$ .

L'étape qui suit consiste à calculer les intégrales

$$A_{n,q} \equiv \int_0^{+\infty} dx x^n e^{-qx} , \quad (\text{B.10})$$

qui sont élémentaires et valent

$$A_{n,q} = \frac{n!}{q^{n+1}} . \quad (\text{B.11})$$

Si on plonge ce résultat dans la relation (B.9), on obtient la formule suivante

$$I_{n,p}^\epsilon = (-\epsilon)^p \frac{n!}{(p-1)!} \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_{p-1,i} \sum_{q=1}^{+\infty} (-\epsilon)^q q^{i-n-1} . \quad (\text{B.12})$$

On voit donc qu'on va pouvoir exprimer les sommes infinies à l'aide de la fonction  $\zeta$  de RIEMANN. A cet effet, si on veut traiter simultanément les deux valeurs possibles pour  $\epsilon$ , il convient de séparer les valeurs paires et impaires de  $q$ . On peut ainsi définir deux quantités

$$\zeta_p(s) \equiv \sum_{q \geq 1} \frac{1}{(2q)^s} \quad (\text{B.13-a})$$

$$\zeta_r(s) \equiv \sum_{q \geq 0} \frac{1}{(2q+1)^s} , \quad (\text{B.13-b})$$

qui sont reliées à la fonction  $\zeta$  par les relations suivantes

$$\zeta_p(s) = \frac{1}{2^s} \zeta(s) \quad (\text{B.14-a})$$

$$\zeta_r(s) = \left[ 1 - \frac{1}{2^s} \right] \zeta(s) . \quad (\text{B.14-b})$$

A partir de là, il est facile d'obtenir

$$\sum_{q=1}^{+\infty} (-\epsilon)^q q^{i-n-1} = \left[ \frac{1}{2^{n+1-i}} - \epsilon \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1-i}} \right) \right] \zeta(n+1-i) , \quad (\text{B.15})$$

ce qui permet d'écrire

$$I_{n,p}^\epsilon = (-\epsilon)^p \frac{n!}{(p-1)!} \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_{p-1,i} \left[ \frac{1}{2^{n+1-i}} - \epsilon \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1-i}} \right) \right] \zeta(n+1-i) . \quad (\text{B.16})$$

Ceci est la forme finale pour les intégrales<sup>5</sup>  $I_{n,p}^\epsilon$ . Comme annoncé, il s'agit d'une somme finie de fonctions  $\zeta$ , avec des coefficients très faciles à calculer.

---

<sup>5</sup>Cette formule est également très utile pour construire une méthode de Gauss pour le calcul numérique des intégrales du type de  $\int_0^{+\infty} dx f(x) Q(n_{B,F}(x))$  (voir par exemple [153]).

Notons que cette méthode n'est pleinement justifiée que lorsque  $n > p - 1$ , de sorte que les fonctions  $\zeta$  qui apparaissent ont toutes un argument strictement supérieur à 1, *i.e.* dans le domaine de convergence de la série de Riemann. Si l'intégrale converge néanmoins, il faut considérer le prolongement analytique de la fonction  $\zeta$ . Le seul cas qui peut poser problème arrive lorsque l'argument de la fonction  $\zeta$  est 1, puisqu'il s'agit d'un pôle de la fonction. Dans les intégrales fermioniques ( $\epsilon = 1$ ),  $\zeta(1)$  est accompagnée d'un facteur nul, et seul intervient le résidu du pôle qui vaut 1. Dans les intégrales bosoniques ( $\epsilon = -1$ ), ce pôle n'est pas compensé, et il reflète le fait que l'intégrale n'est pas définie si  $n < p$ . On trouvera dans la section B.3 quelques propriétés utiles de la fonction  $\zeta$  et de son prolongement analytique.

## B.2 Intégrales du type $\int dx \ln(x) P(x) Q(n_{B,F}(x))$

Passons maintenant aux intégrales de la forme

$$\int_0^{+\infty} dx \ln(x) P(x) Q\left(\frac{1}{e^x + \epsilon}\right). \quad (\text{B.17})$$

A l'évidence, toutes ces intégrales se ramènent aux intégrales plus simples suivantes

$$J_{n,p}^\epsilon \equiv \int_0^{+\infty} dx \ln(x) \frac{x^n}{(e^x + 1)^p}. \quad (\text{B.18})$$

La méthode employée pour calculer les intégrales  $I_{n,p}^\epsilon$  peut être poursuivie jusqu'à l'équation (B.9). Ensuite, il convient de remplacer la quantité  $A_{n,q}$  par

$$A'_{n,q} \equiv \int_0^{+\infty} dx \ln(x) x^n e^{-qx}, \quad (\text{B.19})$$

qui se transforme sous la forme plus simple

$$A'_{n,q} = \frac{1}{q^{n+1}} \left[ \int_0^{+\infty} dx \ln(x) x^n e^{-x} - \int_0^{+\infty} dx \ln(q) x^n e^{-x} \right]. \quad (\text{B.20})$$

La deuxième intégrale a déjà été calculée pour obtenir  $A_{n,q}$ . Pour donner une forme assez pratique à la première intégrale, il est commode de partir de

$$\int_0^{+\infty} dx \ln(x) e^{-x} = -\gamma, \quad (\text{B.21})$$

où  $\gamma = 0.57721566 \dots$  est la constante d'EULER. Ensuite, on peut obtenir le résultat pour  $n > 1$  par récurrence sur  $n$ , ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} dx \ln(x) x^n e^{-x} = A'_n - \gamma n! , \quad (\text{B.22})$$

où les  $A'_n$  sont des nombres entiers définis par la récurrence suivante

$$A'_0 = 0, \quad A'_{n+1} = n! + (n+1)A'_n . \quad (\text{B.23})$$

Ceci permet d'écrire  $J_{n,p}^\epsilon$  sous la forme suivante

$$J_{n,p}^\epsilon = \frac{(-\epsilon)^p}{(p-1)!} \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_{p-1,i} \sum_{q=1}^{+\infty} (-\epsilon)^q q^{i-n-1} [A'_n - n!(\gamma + \ln(q))] . \quad (\text{B.24})$$

Du fait de la présence de  $\ln(q)$  sous la somme infinie, on va avoir également besoin de la dérivée première de la fonction  $\zeta$ , dont la représentation sous forme de série est donnée par

$$\zeta'(s) = - \sum_{q \geq 1} \frac{\ln(q)}{q^s} . \quad (\text{B.25})$$

Ici encore, il faut séparer les  $q$  pairs des  $q$  impairs en définissant

$$\zeta'_p(s) \equiv - \sum_{q \geq 1} \frac{\ln(2q)}{(2q)^s} \quad (\text{B.26-a})$$

$$\zeta'_I(s) \equiv - \sum_{q \geq 0} \frac{\ln(2q+1)}{(2q+1)^s} , \quad (\text{B.26-b})$$

qui sont reliés à  $\zeta$  et  $\zeta'$  par les relations

$$\zeta'_p(s) = \frac{1}{2^s} \zeta'(s) - \frac{\ln(2)}{2^s} \zeta(s) \quad (\text{B.27-a})$$

$$\zeta'_I(s) = \left[ 1 - \frac{1}{2^s} \right] \zeta'(s) + \frac{\ln(2)}{2^s} \zeta(s) . \quad (\text{B.27-b})$$

En utilisant ce qui précède, il est aisé d'obtenir

$$\begin{aligned} J_{n,p}^\epsilon &= (-\epsilon)^p \frac{n!}{(p-1)!} \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_{p-1,i} \\ &\times \left\{ \left[ \frac{1}{2^{n+1-i}} - \epsilon \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1-i}} \right) \right] \left[ \left( \frac{A'_n}{n!} - \gamma \right) \zeta(n+1-i) + \zeta'(n+1-i) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\ln(2)}{2^{n+1-i}} (1+\epsilon) \zeta(n+1-i) \right\} . \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$



### B.3 La fonction $\zeta$ de Riemann

Je rappelle dans cette section quelques résultats élémentaires relatifs à la fonction  $\zeta$  de RIEMANN. Leur démonstration pourra être trouvée dans [154]. La fonction  $\zeta$  peut être définie de deux façons équivalentes<sup>6</sup>

$$\zeta(s) = \sum_{q \geq 1} q^{-s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-s})^{-1}, \quad (\text{B.29})$$

où  $\mathcal{P}$  désigne l'ensemble des nombres premiers. A priori, la série ou le produit de la définition précédente ne convergent que lorsque  $\text{Re}(s) > 1$ . Néanmoins, on peut montrer que la fonction  $\zeta(s)$  peut être étendue à une fonction méromorphe sur le plan complexe, dont la seule singularité est un pôle en  $s = 1$ , de résidu 1.

Une façon de justifier ceci est proposée par [154], qui arrive à la formule suivante

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{B_k}{k!} s(s+1) \cdots (s+k-2) \\ &\quad - \frac{1}{n!} s(s+1) \cdots (s+n-1) \int_1^{+\infty} dx \overline{B}_n(x) x^{-s-n}, \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

où les  $B_k$  sont les nombres de BERNOULLI, et les fonctions  $\overline{B}_n(x)$  des fonctions périodiques de période 1 définies à partir des polynômes de BERNOULLI<sup>7</sup> par

$$\overline{B}_n(x) \equiv B_n(x - [x]). \quad (\text{B.32})$$

La formule (B.30) est valable pour tout entier  $n$  dans le domaine  $\text{Re}(s) > 1$ . Cependant, comme la fonction  $\overline{B}_n(x)$  est périodique, elle est donc bornée, de sorte que l'intégrale du second membre converge dès que  $\text{Re}(s) > 1 - n$ . Ce second membre définit donc une fonction  $\zeta_n(s)$  qui est holomorphe dans le demi-plan  $\text{Re}(s) > 1 - n$ , et qui coïncide avec la fonction  $\zeta(s)$  sur le demi-plan  $\text{Re}(s) > 1$ . On vérifie en outre que  $\zeta_n(s)$  et  $\zeta_{n+1}(s)$  coïncident sur la partie commune de leur domaine de définition. Il en résulte le résultat annoncé sur le prolongement analytique de la fonction  $\zeta(s)$ .

On peut ensuite donner quelques relations et valeurs particulières de la fonction  $\zeta$ . Pour les entiers négatifs, on a

$$\zeta(-m) = -\frac{B_{m+1}}{m+1}, \quad (\text{B.33})$$

---

<sup>6</sup>Cette deuxième forme de la fonction  $\zeta$  en fait un outil très utile en théorie des nombres. Ainsi, elle a joué un rôle essentiel dans l'obtention de la loi de raréfaction des nombres premiers. Elle se justifie en écrivant la décomposition de chaque entier  $q$  de la somme infinie sous la forme de sa décomposition en produit de facteurs premiers.

<sup>7</sup>Les polynômes de Bernoulli sont définis par

$$\frac{ze^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(x) \frac{z^n}{n!}, \quad (\text{B.31})$$

et les nombres de Bernoulli sont les  $B_n \equiv B_n(0)$ .

ce qui implique immédiatement la nullité des nombres  $\zeta(-2r)$ . Pour les entiers négatifs impairs, on peut donner quelques valeurs

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-1) = -\frac{1}{12}, \quad \zeta(-3) = \frac{1}{120}, \quad \zeta(-5) = -\frac{1}{252} . \quad (\text{B.34})$$

Pour les entiers positifs pairs, on peut donner la formule suivante

$$\zeta(2r) = (-1)^{r-1} B_{2r} 2^{2r-1} \frac{\pi^{2r}}{(2r)!} , \quad (\text{B.35})$$

qui donne pour les premières valeurs

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450} . \quad (\text{B.36})$$

Pour les entiers impairs<sup>8</sup>, il n'existe pas de telles relations.

Dans [152], on trouve une formule donnant la dérivée de la fonction  $\zeta$ , pour des arguments pairs négatifs

$$\zeta'(-2r) = \frac{1}{2} (-1)^r (2\pi)^{-2r} \Gamma(2r+1) \zeta(2r+1) . \quad (\text{B.37})$$

Pour un argument nul, on a

$$\zeta'(0) = -1 - \int_1^{+\infty} dx (x - [x] - \frac{1}{2}) x^{-1} = -\ln(\sqrt{2\pi}) . \quad (\text{B.38})$$

Donnons finalement une autre formule qui s'avère parfois utile

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left[ \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right] = 1 - \int_1^{+\infty} dx (x - [x]) x^{-2} = \gamma . \quad (\text{B.39})$$

Il existe de nombreuses autres relations satisfaites par la fonction  $\zeta$ , mais celles ci devraient suffire pour toutes les situations rencontrées dans cette thèse.

---

<sup>8</sup>Un des très rares résultats connus pour les entiers impairs est que  $\zeta(3)$  est irrationnel.

## Annexe C

# Règles de somme

Autrefois, ma maison était pleine de livres à moitié lus. C'est aussi dégoûtant que ces gens qui écornent un foie gras et font jeter le reste.

ALBERT CAMUS  
*La chute.*

**I**l est parfois possible de donner une forme analytique relativement simple à des intégrales impliquant la fonctions spectrale du gluon. En principe, les techniques utilisées dans cette annexe sont très générales et uniquement basées sur l'existence d'une représentation spectrale pour le propagateur du gluon. Toutefois, elles s'avèrent en pratique très utiles dans la théorie effective qui résulte de la sommation des boucles dures. C'est pourquoi je me limiterai ici à cette situation, la généralisation à d'autres cas étant assez directe.

### C.1 Point de départ

Supposons donc qu'on ait affaire à une théorie effective dans laquelle le propagateur du gluon est obtenu par sommation d'une self-énergie  $\Pi$ . En fait, il est commode de séparer d'emblée le propagateur du gluon en ses modes transverses et longitudinaux, de sorte que l'on a en réalité deux self-énergies  $\Pi_{T,L}$  qui sont données à l'ordre des boucles dures par les relations (7.37-a) et (7.37-b). Sans se préoccuper des projecteurs qui permettent d'isoler les différents modes, et qui restent in affectés par la sommation de ces corrections de boucle dure, on peut définir le propagateur retardé des gluons transverses et longitudinaux par

$$^*\Delta_{T,L}^R(l_o, \mathbf{l}) \equiv \frac{i}{l_o^2 - l^2 - \Pi_{T,L}(l_o, \mathbf{l}) + i l_o \varepsilon} , \quad (\text{C.1})$$

où pour simplifier les notations j'ai laissé tomber l'indice *HTL* qui rappelait qu'il s'agit d'une correction thermique calculée à l'ordre des boucles dures. Si

on définit les fonctions spectrales

$$\rho_{T,L}(l_o, l) \equiv {}^*\Delta_{T,L}^R(l_o, l) - {}^*\Delta_{T,L}^A(l_o, l) , \quad (C.2)$$

on peut facilement vérifier qu'elles entrent dans la représentation spectrale du propagateur effectif du gluon de la façon suivante<sup>1</sup>

$$\frac{i}{l_o^2 - l^2 - \Pi_{T,L}(l_o, l) + il_o\varepsilon} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} E \rho_{T,L}(E, l) \frac{i}{l_o^2 - E^2 + il_o\varepsilon} . \quad (C.3)$$

Les intégrales qui nous intéressent sont des intégrales sur l'axe réel, pondérées par une fonction spectrale  $\rho_{T,L}$ , du type de

$$\rho_{T,L}[l, f] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\pi} \rho_{T,L}(lx, l) f(x) . \quad (C.4)$$

Du fait de l'imparité en  $l_o$  des fonctions spectrales  $\rho_{T,L}(l_o, l)$ , ces intégrales sont nulles si la fonction  $f$  est paire.

Pour certaines classes de fonctions  $f(x)$ , on peut donner une expression analytique de cette intégrale. Le point de départ consiste à prendre la partie imaginaire de la relation (C.3) en notant  $E \equiv lx$  et  $l_o \equiv ly$ , ce qui donne la relation suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\pi} x \rho_{T,L}(lx, l) \frac{\mathbb{P}}{y^2 - x^2} = \frac{l^2(y^2 - 1) - \text{Re} \Pi_{T,L}(ly, l)}{(l^2(y^2 - 1) - \text{Re} \Pi_{T,L}(ly, l))^2 + (\text{Im} \Pi_{T,L}(ly, l))^2} . \quad (C.5)$$

Quelques conséquences triviales de cette relation peuvent être obtenues en choisissant des valeurs spéciales pour  $y$ . Ainsi, avec  $y = 0$ , on obtient les relations<sup>2</sup>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\pi} \frac{\rho_T(lx, l)}{x} = \frac{1}{l^2} \quad (C.6\text{-a})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\pi} \frac{\rho_L(lx, l)}{x} = \frac{1}{l^2 + 3m_g^2} . \quad (C.6\text{-b})$$

Le choix  $y = \infty$  donne quant à lui les relations

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\pi} x \rho_{T,L}(lx, l) = \frac{1}{l^2} . \quad (C.7)$$

---

<sup>1</sup>Il s'agit d'une forme de la représentation spectrale qui est équivalente à celle qui a été donnée par l'équation (2.30). Une simplification supplémentaire est rendue possible par le fait que le produit  $E \rho_{T,L}(E, l)$  est pair en  $E$ , ce qui permet de regrouper les énergies positives et négatives pour reconstituer un propagateur libre complet. Il suffit ensuite de prendre la transformée de Fourier, et d'extraire la fonction retardée.

<sup>2</sup>Le fait que le résultat transverse donne  $1/l^2$ , qui devient infini lorsque  $l$  tend vers zéro, est étroitement relié à l'absence de masse magnétique à cet ordre du calcul perturbatif.

Notons également que lorsque  $|y| > 1$ , la relation (C.5) se simplifie pour devenir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\pi} x \rho_{T,L}(lx, l) \frac{\mathbb{P}}{y^2 - x^2} = \frac{1}{l^2(y^2 - 1) - \text{Re } \Pi_{T,L}(ly, l)} , \quad (\text{C.8})$$

car  $\text{Im } \Pi_{T,L}(ly, l) = 0$  dans la région de genre temps. Cette simplification est spécifique à l'approximation de boucle dure utilisée pour calculer la self-énergie du gluon.

## C.2 Contribution des pôles

Compte tenu des propriétés analytiques du propagateur effectif du gluon, l'intégrale définie par la relation (C.4) reçoit une contribution des pôles du propagateur aussi bien que de la région de genre espace. Il est toujours très facile de donner une expression assez simple pour la contribution des pôles considérés séparément. Il suffit pour cela de se rappeler que la partie imaginaire  $\text{Im } \Pi_{T,L}$  est nulle dans la région de genre temps, ce qui fait que les pôles apparaissent dans les fonctions spectrales  $\rho_{T,L}$  sous la forme de distributions  $\delta(\cdot)$  dont le support est la courbe de dispersion.

Plus précisément, la contribution des pôles à l'intégrale (C.4) est donnée par la relation suivante :

$$\int_{\text{poles}} \frac{dx}{2\pi} \rho_{T,L}(lx, l) f(x) = \frac{Z_{T,L}(l)}{2l\omega_{T,L}(l)} \left[ f\left(\frac{\omega_{T,L}(l)}{l}\right) - f\left(-\frac{\omega_{T,L}(l)}{l}\right) \right] , \quad (\text{C.9})$$

où  $\omega_{T,L}(l)$  est la valeur de l'énergie sur la courbe de dispersion, alors que  $Z_{T,L}(l)$  est le résidu associé au pôle correspondant. Ce résidu est relié à la partie réelle de la self-énergie du gluon par la relation

$$Z_{T,L}^{-1} = 1 - \frac{1}{2l\omega_{T,L}(l)} \left. \frac{\partial \text{Re } \Pi_{T,L}(lx, l)}{\partial x} \right|_{x=\omega_{T,L}/l} , \quad (\text{C.10})$$

qui, si on utilise l'expression de  $\Pi_{T,L}$  donnée par l'approximation de boucle dure, devient :

$$Z_T = \frac{2\omega_T^2(\omega_T^2 - l^2)}{3\omega_T^2 m_g^2 - (l^2 - \omega_T^2)^2} \quad (\text{C.11-a})$$

$$Z_L = \frac{2\omega_L^2}{3m_g^2 + l^2 - \omega_L^2} . \quad (\text{C.11-b})$$

## C.3 Intégrales du type $\int P(x) \rho_{T,L}(x)$

Considérons maintenant le cas un peu particulier où la fonction  $f(x)$  dans (C.4) est un polynôme  $P(x)$ . Dans ce polynôme, on peut d'emblée se limiter aux

monômes de degré impair, ce qui signifie que ce cas se ramène complètement aux intégrales du type de

$$\rho_{T,L}[l, x^{2n+1}] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\pi} \rho_{T,L}(lx, l) x^{2n+1} . \quad (\text{C.12})$$

Pour évaluer ces intégrales, il est utile de partir de la relation (C.8), valable à grand  $y$ , et de développer le premier membre en puissances de  $1/y$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{l^2(y^2 - 1) - \text{Re} \Pi_{T,L}(ly, l)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\pi} \rho_{T,L}(lx, l) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^{2n+1}}{y^{2n+2}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{y^{2n+2}} \rho_{T,L}[l, x^{2n+1}] . \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Le premier membre peut donc être vu comme une fonctionnelle génératrice des intégrales  $\rho_{T,L}[l, x^{2n+1}]$ . En d'autres termes, il suffit de la développer en puissances de  $1/y^2$  et d'identifier les coefficients de ce développement.

Aux premiers ordres, un calcul explicite donne les résultats suivants

$$\rho_{T,L}[l, x] = \frac{1}{l^2} \quad (\text{C.14-a})$$

$$\rho_{T,L}[l, x^3] = \frac{l^2 + m_g^2}{l^4} \quad (\text{C.14-b})$$

$$\rho_T[l, x^5] = \frac{5(l^4 + m_g^4) + 11m_g^2 l^2}{5l^6} \quad (\text{C.14-c})$$

$$\rho_L[l, x^5] = \frac{5(l^4 + m_g^4) + 8m_g^2 l^2}{5l^6} \quad (\text{C.14-d})$$

$$\rho_T[l, x^7] = \frac{35(l^6 + m_g^6) + 71m_g^2 l^4 + 77m_g^4 l^2}{35l^8} \quad (\text{C.14-e})$$

$$\rho_T[l, x^7] = \frac{35(l^6 + m_g^6) + 122m_g^2 l^4 + 119m_g^4 l^2}{35l^8} . \quad (\text{C.14-f})$$

## C.4 Intégrales du type $\int x P(1/(x^2 - y^2)) \rho_{T,L}(x)$

Une autre classe de règles de sommes pour lesquelles le résultat peut être obtenu analytiquement est celui des intégrales de la forme

$$\rho_{T,L} \left[ l, x \frac{\mathbb{P}}{(x^2 - y^2)^{n+1}} \right] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2\pi} \rho_{T,L}(lx, l) x \frac{\mathbb{P}}{(x^2 - y^2)^{n+1}} , \quad (\text{C.15})$$

où  $y$  est un nombre fixé. On connaît déjà le résultat de cette intégrale lorsque  $n = 0$ , auquel cas il est donné par la relation (C.5) dans le cas général, et se simplifie en (C.8) si  $|y| > 1$ .

A partir de là, on peut obtenir toutes ces intégrales au moyen de la formule de récurrence suivante

$$\rho_{T,L} \left[ l, x \frac{\mathbb{P}}{(x^2 - y^2)^{n+2}} \right] = \frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial y^2} \rho_{T,L} \left[ l, x \frac{\mathbb{P}}{(x^2 - y^2)^{n+1}} \right] , \quad (\text{C.16})$$

qui se généralise à

$$\rho_{T,L} \left[ l, x \frac{\mathbb{P}}{(x^2 - y^2)^{n+1}} \right] = \frac{1}{n!} \left[ \frac{\partial}{\partial y^2} \right]^n \rho_{T,L} \left[ l, x \frac{\mathbb{P}}{x^2 - y^2} \right] . \quad (\text{C.17})$$

On peut noter que ce résultat combiné au précédent permet de calculer  $\rho_{T,L}[l, f]$  pour toute fraction rationnelle  $f$ .

# Bibliographie

Alguien propuso un método regresivo : Para localizar el libro A, consultar previamente un libro B que indique el sitio de A ; para localizar el libro B, consultar previamente un libro C, y así hasta lo infinito. . . En aventuras de éstas, he prodigado y consumado mis años.

JORGE LUIS BORGES  
*La Biblioteca de Babel, Ficciones*

- [1] M. Itzykson, J.B. Zuber, *Quantum field theory*, Mc Graw Hill.
- [2] L.H. Ryder, *Quantum field theory*, Cambridge University Press (1996).
- [3] G. Serman, *An introduction to quantum field theory*, Cambridge University Press (1993).
- [4] M. Le Bellac, *Thermal field theory*, Cambridge University Press (1996).
- [5] J.I. Kapusta, *Finite-Temperature Field Theory*, Cambridge University Press, (1989).
- [6] N.P. Landsman, Ch.G. van Weert, *Phys. Rep.* **145**, 141 (1987).
- [7] W. Pauli, *Theory of relativity*, Dover Publications, Inc., New York (1981).
- [8] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, B. Roulet, *Physique statistique*, Hermann, Paris (1989).
- [9] R.C. Tolman, *Relativity, thermodynamics and cosmology*, Dover Publications, Inc., New York (1987).
- [10] C. Moller, *The theory of relativity*, Oxford University Press (1972).
- [11] I. Bazarov, *Thermodynamique*, Ed. MIR, Moscou (1989).
- [12] H. Ott, *Z. Phys.* **175**, 70 (1963).
- [13] W. Israel, *Ann. Phys. (N.Y.)* **100**, 310 (1976).
- [14] W. Israel, *Physica* **106A**, 204 (1981).
- [15] R.J. Furnstahl, B.D. Serot, *Phys. Rev. C* **44**, 2141 (1991).



- [16] J. Rammer, H. Smith, Rev. of Modern Physics **58**, 323 (1986).
- [17] N. Jacobson, *Lie algebras*, Dover Publications, Inc., New York (1979).
- [18] F. Gelis, Z. Phys. **C 70**, 321 (1996).
- [19] A.G. Hall, Physica **A 80**, 369 (1975).
- [20] A.G. Hall, J. Phys. **A 8**, 214 (1975).
- [21] Y.A. Kukhareenko, S.G. Tikhodeev, Sov. Phys. JETP **56**, 831 (1982).
- [22] T.S. Evans, D.A. Steer, Nucl. Phys. **B 474**, 481 (1996).
- [23] R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan **12**, 570 (1957).
- [24] P.C. Martin, J. Schwinger, Phys. Rev. **115**, 1342 (1959).
- [25] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14**, 351 (1955).
- [26] R. Baier, A. Niegawa, Phys. Rev. **D 49**, 4107 (1994).
- [27] T.S. Evans, Phys. Lett. **B 252**, 108 (1990).
- [28] T.S. Evans, Phys. Lett. **249**, 286 (1990).
- [29] T.S. Evans, Nucl. Phys. **B 374**, 340 (1991).
- [30] J.C. Taylor, Phys. Rev. **D 47**, 725 (1993).
- [31] T.S. Evans, Nucl. Phys. **B 496**, 486 (1997).
- [32] Y. Fujimoto, H. Matsumoto, H. Umezawa, I. Ojima, Phys. Rev. **D 30**, 1400 (1984).
- [33] J. Schwinger, J. Math. Phys. **2**, 407 (1961).
- [34] P.M. Bakshi, K.T. Mahanthappa, J. Math. Phys. **4**, 1 (1963).
- [35] L.V. Keldysh, Sov. Phys. JETP **20**, 1018 (1964).
- [36] R.L. Kobes, K.L. Kowalski, Phys. Rev. **D 34**, 513 (1986).
- [37] R.L. Kobes, G.W. Semenoff, N. Weiss, Z. Phys. **C 29**, 371 (1985).
- [38] A.J. Niemi, G.W. Semenoff, Nucl. Phys. **B 230**, 181 (1984).
- [39] T.S. Evans, Phys. Rev. **D 47**, 4196 (1993).
- [40] T.S. Evans, Talk given at the “3rd Workshop on Thermal Field Theories and their Applications”, Banff, Canada (1993).
- [41] T.S. Evans, A.C. Pearson, Phys. Rev. **D 52**, 4652 (1995).
- [42] A. Niegawa, Phys. Rev. **D 40**, 1199 (1989).
- [43] M. Le Bellac, H. Mabilat, Phys. Lett. **B 381**, 262 (1996).
- [44] H. Mabilat, Z. Phys. **C 75**, 155 (1997).
- [45] P. Aurenche, T. Becherrawy, Nucl. Phys. **B 379**, 259 (1992).
- [46] M.A. van Eijck, R. Kobes, Ch.G. van Weert, Phys. Rev. **D 50**, 4097 (1994).
- [47] M.A. van Eijck, Ch.G. van Weert, Phys. Lett. **B 278**, 305 (1992).
- [48] F. Guerin, Phys. Rev. **D 49**, 4182 (1994).
- [49] F. Guerin, Nucl. Phys. **B 432**, 281 (1994).
- [50] A.J. Niemi, Phys. Lett. **B 203**, 425 (1987).

- [51] M. Le Bellac, H. Mabilat, Z. Phys. **C 75**, 137 (1997).
- [52] T. Altherr, D. Seibert, Phys. Lett. **B 333**, 149 (1994).
- [53] P.F. Bedaque, Phys. Lett. **B 344**, 23 (1995).
- [54] T. Altherr, Phys. Lett. **B 341**, 325 (1995).
- [55] V.V. Lebedev, A.V. Smilga, Physica **A 181**, 187 (1992).
- [56] U. Kraemmer, A.K. Rebhan, H. Schulz, Ann. Phys. (N.Y.) **238**, 286 (1995).
- [57] R. Baier, M. Dirks, K. Redlich, Talk given at the XXXVII-th Cracow School of Theoretical Physics, Dynamics of Strong Interactions (1997).
- [58] R. Baier, M. Dirks, K. Redlich, D. Schiff, Phys. Rev. **D 56**, 2548 (1997).
- [59] H.A. Weldon, Phys. Rev. **D 28**, 2007 (1983).
- [60] R.L. Kobes, G.W. Semenoff, Nucl. Phys. **B 260**, 714 (1985).
- [61] R.L. Kobes, G.W. Semenoff, Nucl. Phys. **B 272**, 329 (1986).
- [62] P.F. Bedaque, A. Das, S. Naik, Mod. Phys. Lett. **A 12**, 2481 (1997).
- [63] F. Gelis, Nucl. Phys. **B 508**, 483 (1997).
- [64] P.V. Landshoff, Phys. Lett. **B 386**, 291 (1996).
- [65] N. Ashida, H. Nakkagawa, A. Niegawa, H. Yokota, Ann. Phys. (N.Y.) **215**, 315 (1992).
- [66] C. Contreras, M. Loewe, Z. Phys. **C 40**, 253 (1988).
- [67] A. Gomez Nicola, A.F. Alvarez-Estrada, Z. Phys. **C 60**, 711 (1993).
- [68] S. Gupta, S.N. Nayak, Preprint TIFR/TH/97-03, hep-ph/9702205.
- [69] R.D. Pisarski, in *From thermal field theory to neural networks : a day to remember Tanguy Altherr*, Edited by P. Aurenche, P. Sorba and G. Veneziano, World Scientific Publishing, Singapore (1996).
- [70] R.D. Pisarski, Phys. Rev. Lett. **76**, 3084 (1996).
- [71] F. Gelis, Preprint LAPTH-689/98, hep-ph/9806425, submitted to Phys. Rev. D.
- [72] V. Koch, Int. J. Mod. Phys. E **6**, 203 (1997).
- [73] M. Gell-Mann, M. Levy, Nuovo Cimento **16**, 705 (1960).
- [74] E. Braaten, R.D. Pisarski, Nucl. Phys. **B 337**, 569 (1990).
- [75] E. Braaten, R.D. Pisarski, Nucl. Phys. **B 339**, 310 (1990).
- [76] J. Frenkel, J.C. Taylor, Nucl. Phys. **B 334**, 199 (1990).
- [77] R.D. Pisarski, M.G.H. Tytgat, Phys. Rev. **D 54**, 2989 (1996).
- [78] R.D. Pisarski, M.H.G. Tytgat, Phys. Rev. Lett. **78**, 3622 (1997).
- [79] R.D. Pisarski, T.L. Trueman, M.H.G. Tytgat, Phys. Rev. **D 56**, 7077 (1997).
- [80] R.D. Pisarski, T.L. Trueman, M.H.G. Tytgat, Talk given at Yukawa International Seminar on Non-Perturbative QCD : Structure of the QCD Vacuum (YKIS 97), Kyoto, Japan, 2-12 Dec 1997.

- [81] R. Baier, M. Dirks, O. Kober, Phys. Rev. **D 54**, 2222 (1996).
- [82] J. Wess, B. Zumino, Phys. Lett. **B 37**, 95 (1971).
- [83] E. Witten, Nucl. Phys. **B 223**, 422 (1983).
- [84] T.D. Lee, M. Nauenberg, Phys. Rev. **133**, 1549 (1964).
- [85] T. Kinoshita, A. Ukawa, Phys. Rev. **D 13**, 1573 (1976).
- [86] H.A. Weldon, Phys. Rev. **D 58**, 105002 (1998).
- [87] H.A. Weldon, Preprint hep-ph/9809330.
- [88] E. Braaten, A. Nieto, Phys. Rev. Lett. **76**, 1417 (1996).
- [89] E. Braaten, A. Nieto, Phys. Rev. **D 53**, 3421 (1996).
- [90] I.T. Drummond, R.R. Horgan, P.V. Landshoff, A. Rebhan, Phys. Lett. **B 398**, 326 (1997).
- [91] N. Ashida, H. Nakkagawa, A. Niegawa, H. Yokota, Phys. Rev. **D 45**, 2066 (1992).
- [92] J. Cleymans, I. Dadić, Z. Phys. **C 45**, 57 (1989).
- [93] J. Cleymans, I. Dadić, Phys. Rev. **D 47**, 160 (1992).
- [94] J. Cleymans, V.V. Goloviznin, K. Redlich, Phys. Rev. **D 47**, 989 (1993).
- [95] J. Cleymans, V.V. Goloviznin, K. Redlich, Z. Phys. **C 59**, 495 (1993).
- [96] R. Baier, Y.L. Dokshitzer, A.H. Mueller, S. Peigné, D. Schiff, Nucl. Phys. **B 478**, 577 (1996).
- [97] R. Baier, Y.L. Dokshitzer, A.H. Mueller, S. Peigné, D. Schiff, Nucl. Phys. **B 483**, 291 (1997).
- [98] C. Gale, J.I. Kapusta, Nucl. Phys. **B 357**, 65 (1991).
- [99] J. Frenkel, J.C. Taylor, Nucl. Phys. **B 374**, 156 (1992).
- [100] E. Braaten, R.D. Pisarski, Phys. Rev. **D 42**, 2156 (1990).
- [101] R.D. Pisarski, Invited talk presented at Quark Matter, Menton 1990, Nucl. Phys. **A 525**, 175 (1991).
- [102] R.L. Kobes, G. Kunstatter, A. Rebhan, Phys. Rev. Lett. **64**, 2992 (1990).
- [103] T. Altherr, Phys. Lett. **B 238**, 360 (1990).
- [104] J.P. Blaizot, E. Iancu, Phys. Rev. Lett. **70**, 3376 (1993).
- [105] J.P. Blaizot, E. Iancu, Nucl. Phys. **B 434**, 662 (1995).
- [106] P.F. Kelly, Q. Liu, C. Lucchesi, C. Manuel, Phys. Rev. **D 50**, 4209 (1994).
- [107] P.F. Kelly, Q. Liu, C. Lucchesi, C. Manuel, Phys. Rev. Lett. **72**, 3461 (1994).
- [108] E. Braaten, R.D. Pisarski, Phys. Rev. **D 45**, 1827 (1992).
- [109] R. Baier, H. Nakkagawa, A. Niegawa, K. Redlich, Z. Phys. **C 53**, 433 (1992).
- [110] H. Schultz, Nuc. Phys. B. **413**, 253 (1994).
- [111] F. Flechsig, A.K. Rebhan, Nucl. Phys. **B 464**, 279 (1996).

- [112] E. Braaten, R.D. Pisarski, T.C. Yuan, Phys. Rev. Lett. **64**, 2242 (1990).
- [113] P. Aurenche, F. Gelis, R. Kobes, H. Zaraket, Phys. Rev **D 58**, 085003 (1998).
- [114] S.M.H. Wong, Z. Phys. **C 53**, 465 (1992).
- [115] J. Cleymans, I. Dadić, Z. Phys. **C 42**, 133 (1989).
- [116] R. Baier, B. Pire, D. Schiff, Phys. Rev. **D 38**, 2814 (1988).
- [117] T. Altherr, P. Aurenche, T. Becherrawy, Nucl. Phys. **B 315**, 436 (1989).
- [118] T. Altherr, T. Becherrawy, Nucl. Phys. **B 330**, 174 (1990).
- [119] Y. Gabellini, T. Grandou, D. Poizat, Ann. of Phys. **202**, 436 (1990).
- [120] M. Le Bellac, P. Reynaud, Nucl. Phys. **B 380**, 423 (1992).
- [121] T. Altherr, P. Aurenche, Z. Phys. **C 45**, 99 (1989).
- [122] R. Baier, S. Peigné, D. Schiff, Z. Phys. **C 62**, 337 (1994).
- [123] P. Aurenche, T. Becherrawy, E. Petitgirard, Preprint ENSLAPP-A-452/93, hep-ph/9403320.
- [124] P. Aurenche, F. Gelis, R. Kobes, E. Petitgirard, Phys. Rev. **D 54**, 5274 (1996).
- [125] P. Aurenche, F. Gelis, R. Kobes, E. Petitgirard, Z. Phys. **C 75**, 315 (1997).
- [126] J.I. Kapusta, P. Lichard, D. Seibert, Phys. Rev. **D 44**, 2774 (1991).
- [127] R. Baier, Y.L. Dokshitzer, S. Peigné, D. Schiff, Phys. Lett. **B 345**, 277 (1995).
- [128] J. Cleymans, V.V. Goloviznin, K. Redlich, Phys. Rev. **D 47**, 173 (1993).
- [129] B.G. Zakharov, Phys. Atom. Nucl. **61**, 838 (1998).
- [130] R. Baier, Y.L. Dokshitzer, A.H. Mueller, D. Schiff, Preprint hep-ph/9804212.
- [131] L.D. Landau, I.Ya. Pomeranchuk, Dokl. Akad. Nauk. SSR **92**, 535 (1953).
- [132] A.B. Migdal, Phys. Rev. **103**, 1811 (1956).
- [133] S. Klein, et al., Talk presented at the Int. Symp. on Lepton and Photon Interactions, Ithaca, NY, Aug 10-15, 1993.
- [134] R. Becker-Szendy, et al., Talk presented at the Int. Symp. on Ultrahigh-energy multiparticle phenomena, Aspen, Sep 12-17, 1993.
- [135] S. Peigné, Thèse de l'université Paris-Sud, Orsay (1995).
- [136] A. Niegawa, Phys. Rev. **D 56**, 1073 (1997).
- [137] J.P. Blaizot, E. Iancu, Nucl. Phys. **B 459**, 559 (1996).
- [138] J.P. Blaizot, E. Iancu, Phys. Rev. Lett. **76**, 3080 (1996).
- [139] E. Quack, P.A. Henning, Phys.Rev.D **54**, 3125 (1996).
- [140] V.V. Lebedev, A.V. Smilga, Ann. Phys. (N.Y.) **202**, 229 (1990).
- [141] R.G. Stuart, Talk given at the conference "Electroweak interactions in e+e- collisions", Ringberg Castle, Germany, Feb 5-8 (1995).

- [142] R.G. Stuart, Nucl. Phys. **B 498**, 28 (1997).
- [143] E. Petitgirard, Preprint hep-ph/9808344.
- [144] E. Petitgirard, Preprint hep-ph/9809516.
- [145] M.E. Carrington, R. Kobes, E. Petitgirard, Phys. Rev. **D 57**, 2631 (1998).
- [146] M.E. Carrington, R. Kobes, Phys. Rev. **D 57**, 6372 (1998).
- [147] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris (1966).
- [148] L. Schwartz, *Méthodes mathématiques pour la physique*, Hermann, Paris (1965).
- [149] I.M. Guelfand, G.E. Chilov, *Les distributions*, Dunod, Paris (1962).
- [150] J. Arsac, *Transformation de Fourier et théorie des distributions*, Dunod, Paris (1961).
- [151] Y. Choquet-Bruhat, *Distributions*, Masson et Cie, Paris (1973).
- [152] H.E. Haber, H.A. Weldon, J. Math. Phys. **23**, 1852 (1982).
- [153] M. Crouzeix, A.L. Mignot, *Analyse numérique des équations différentielles*, Ed. Masson, Paris (1989).
- [154] P. Cartier, From number theory to physics, Ed. by M. Waldschmidt, P. Moussa, J.-M. Luck and C. Itzykson, Springer-Verlag, Berlin (1992).

# Index

Annihilation  $q\bar{q}$ , 170, 187, 225  
 Anomalies, 124  
  
 BETHE-SALPETHER, équation de, 247  
 BOSE-EINSTEIN, distribution de, 35, 64  
 Boucles dures, 115, 120, 141, 169
 

- approximation de, 147, 165, 179
- contre termes, 146, 155, 179
- fondements, 142
- Lagrangien effectif, 145, 154

 Bremsstrahlung, 187, 202, 214, 224  
  
 CAMPBELL-HAUSSDORF, formule de, 33  
 CARATHEODORY, principe de, 19  
 Chaleur, voir Thermodynamique

- Charges conservées, 27, 37, 39
- Colinéaire, divergence, 116, 162, 182, 195, 199, 227, 237
- COMPTON, effet, 170, 178
- Contour
  - invariance vis à vis du contour, 41, 62
  - partie verticale, 31, 62, 65, 68
  - parties horizontales, 31, 62
- CUTKOSKY, voir Règles de coupure
- DEBYE, écrantage de, 151, 161, 232
- Dérivation par rapport à la masse, formule de, 60, 71
- Désintégration du pion, 103, 120, 123
- Diagrammes du vide, 33, 70, 75
- Dileptons, voir Photons virtuels
- Distributions
  - définition, 256
  - multiplication et pathologies, 74, 84, 260
  - opérations de base, 257
  - transformation de FOURIER, 258
- DYSON, sommation de, 66, 70, 145
- DYSON-SCHWINGER, équation de, 245, 246
- Energie interne, voir Thermodynamique
- Entropie, voir Thermodynamique
- Etats asymptotiques, 16, 133
- FERMI-DIRAC, distribution de, 39
- FEYNMAN, règles de
  - champs fermioniques, 39
  - champs scalaires complexes, 37
  - champs scalaires réels, 36
  - formalismes alternatifs, 80
  - temps imaginaire, 45
  - temps réel, 64, 70, 75
- Fonctionnelle génératrice, 32
- Fonctions de GREEN
  - à température finie
    - définition, 17, 29
    - dependance en  $\lambda$ , 29
    - limite d'impulsion nulle, 110
  - à température nulle, 17
- Formalisme
  - à temps imaginaire, 14, 43, 108
  - à temps réel, 15, 62
  - retardé-avancé, 81, 109, 137, 238, 247
- GIBBS-DUHEM, relation de, 27

- HEISENBERG, schéma de, 30
- HTL, voir Boucles dures
  
- Infrarouge, divergence, 181, 214, 241
- Interaction, schéma, 30
  
- KUBO-MARTIN-SCHWINGER, relations de, 40, 48, 67, 73, 77
  
- LANDAU, amortissement de, 153, 161
- LANDAU-POMERANCHUK-MIGDAL, effet, 231
- Localité, 115, 147, 155
  
- Masse magnétique, 161, 217, 246
- MATSUBARA, fréquences de, 45, 108
- Modèle  $\sigma$ , 104
  
- Observables
  - à température finie, 17, 132
  - à température nulle, 16
- Opérateur d'évolution, 30
- Opérateur densité
  - covariant, 23
  - dans le référentiel propre, 29
  
- Photons, 130
  - réels, 137, 195, 209, 223
  - virtuels, 140, 168, 192, 219
- Plus grand temps, équation du, 88
- Produit de convolution
  - et transformée de FOURIER, 63, 260
  - propriétés, 57, 71
- Propagateur
  - d'un champ fermionique, 39, 175, 198
  - d'un champ scalaire complexe, 38
  - d'un champ scalaire réel, 37, 145
  - d'un champ vectoriel, 175, 272
  
- Quarks constituants, 106
- Quasiparticules
  - durée de vie, 85, 133, 150, 232, 240, 243
  - relations de dispersion, 149, 274
  
- Règles de coupure
  - approche alternative, 93
  - approche historique, 91
  - formalisme retardé-avancé, 99, 137, 174, 238
  - interprétation, 92

- et unitarité, 87, 96, 138
- Règles de somme, 211, 272
- Renormalisation, 78, 158
- Représentation spectrale
  - coordonnée  $x^o$ , 48
  - fonctions à deux points, 56, 71, 273
  - fonctions retardées-avancées, 50
  - temps imaginaire, 50
- RIEMANN, fonction  $\zeta$  de, 267, 269, 270
- Scalaire, interaction en  $\lambda\phi^4$ , 28, 144
- Symétrie chirale
  - brisure explicite, 106
  - brisure spontanée, 105
- Taux de production/désintégration, 107, 135, 137, 140
- Température nulle, limite de, 76, 150
- Température
  - absolue, 20
  - empirique, 20
- Temps imaginaire, voir Formalisme
- Temps réel, voir Formalisme
- Thermodynamique
  - d'un corps en mouvement
    - approche de OTT, 24
    - approche de PLANCK, 24
    - formulation covariante, 20, 26
  - dans le référentiel propre, 18
  - premier principe, 19
  - second principe, 19
- Travail, voir Thermodynamique
- WARD, identités de, 154, 173
- WESS-ZUMINO-WITTEN, fonctionnelle de, 124
- WICK, théorème de, 34





**Résumé :** Le cadre général de cette thèse est la théorie des champs à température finie, et plus particulièrement le calcul perturbatif des fonctions de Green thermiques.

Dans une première partie sont considérés trois problèmes plutôt en relation avec le formalisme lui-même. Après deux chapitres introductifs destinés à mettre en place le cadre et les notations utilisées par la suite, un chapitre est dédié à clarifier certains aspects de la justification des règles de Feynman du formalisme à temps réel. Ensuite, je m'intéresse dans le chapitre 4 au problème des règles de coupure dans les formalismes à temps réel. En particulier, outre la résolution d'une controverse à ce sujet, je donne les règles de coupure à utiliser dans la version "retardée-avancée" de ce formalisme. Enfin, le dernier problème abordé dans la première partie est celui de la désintégration du pion en deux photons dans un environnement thermique. J'y montre que les contradictions existant dans la littérature à ce sujet sont dues à certaines propriétés analytiques des fonctions de Green thermiques.

La deuxième partie concerne le calcul du taux de production de photons ou de paires de leptons (photons virtuels) par un plasma de quarks et de gluons. Le cadre de ce travail est la réorganisation du développement perturbatif obtenue par la sommation des diagrammes connus sous le nom de boucles dures. Le premier volet de cette étude concerne la production de photons virtuels où l'on montre que des contributions importantes arrivent à deux boucles et complètent le résultat déjà connu à une boucle. L'autre volet est la production de photons réels, pour lesquels on montre que des divergences colinéaires extrêmement fortes rendent les contributions à deux boucles largement dominantes devant les contributions à une boucle. Dans les deux cas, le phénomène observé peut être interprété comme des insuffisances de l'approximation qui conduit aux boucles dures.

**Mots-clé :** Théorie quantique des champs, Systèmes à haute température, Développement perturbatif, Chromodynamique quantique, Plasma de quarks et de gluons

**Abstract :** The general framework of this work is thermal field theory, and more precisely the perturbative calculation of thermal Green's functions.

In a first part, I consider three problems closely related to the formalism itself. After two introductory chapters devoted to set up the framework and the notations used afterwards, a chapter is dedicated to a clarification of certain aspects of the justification of the Feynman rules of the real time formalism. Then, I consider in chapter 4 the problem of cutting rules in the real time formalisms. In particular, after solving a controversy on this subject, I generalize these cutting rules to the “retarded-advanced” version of this formalism. Finally, the last problem considered in this part is that of the pion decay into two photons in a thermal bath. I show that the discrepancies found in the literature are due to peculiarities of the analytical properties of the thermal Green's functions.

The second part deals with the calculation of the photon or dilepton (virtual photon) production rate by a quark gluon plasma. The framework of this study is the effective theory based on the resummation of hard thermal loops. The first aspect of this study is related to the production of virtual photons, where we show that important contributions arise at two loops, completing the result already known at one loop. In the case of real photon production, we show that extremely strong collinear singularities make two loop contributions dominant compared to one loop ones. In both cases, the importance of two loop contributions can be interpreted as weaknesses of the hard thermal loop approximation.

**Keywords :** Quantum field theory, High temperature systems, Perturbative expansion, QCD, Quark-gluon plasma